



Д. В. Гальцов

**ЧАСТИЦЫ
И ПОЛЯ
В ОКРЕСТНОСТИ
ЧЁРНЫХ ДЫР**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

Д. В. ГАЛЬЦОВ

ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ ЧЕРНЫХ ДЫР

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1986

Гальцов Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — 288 с.

Монография посвящена математическим аспектам физики черных дыр. Особое внимание уделяется проблемам разделения переменных и построения решений уравнений для безмассовых и массивных полей различного спина в пространствах Шварцшильда и Керра, теории потенциалов Дебая и функций Грина; исследуется спонтанное и вынужденное излучение частиц, движущихся в окрестности черных дыр. Книга дает представление о современном состоянии классической и квантовой теории полей в искривленном пространстве-времени, содержащем черные дыры.

Для специалистов в области теории поля и теории гравитации, астрофизиков, аспирантов и студентов.

Рецензенты:

профессор А. А. Гриб,
д-р физ.-мат. наук В. Н. Мельников

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета*

МОНОГРАФИЯ

Дмитрий Владимирович ГАЛЬЦОВ

ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ ЧЕРНЫХ ДЫР

Заведующий редакцией С. И. Зеленский. Редактор О. В. Семененко.
Художественный редактор Ю. М. Добрянская. Технический редактор
К. С. Чистякова. Корректоры Л. А. Айдарбекова, Т. С. Милякова

ИБ № 2223

Сдано в набор 19.03.86. Подписано в печать 23.10.86. Л-66459 Формат
60×90/16. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Высокая печать.
Усл. печ. л. 18,0 Уч.-изд. л. 19,36. Тираж 2650 экз. Заказ 335 Цена 3 р. 20 к.
Изд. № 3751

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава I. Пространства-времени, содержащие черные дыры	9
§ 1. Вращающаяся заряженная черная дыра	9
Поле Керра — Ньюмена (9). Аналитическое расширение (15). Поле Керра — Ньюмена в формализме Ньюмена — Пенроуза (16).	
§ 2. «Замагнитченные» черные дыры	20
Симметрия SU (2, 1) уравнений Эйнштейна — Максвелла для аксиально-симметричных полей (20). Шварцшильдова черная дыра в магнитной Вселенной (21). Вращающаяся черная дыра в сильном магнитном поле (23).	
§ 3. Орбиты пробных частиц	27
Интегралы движения в поле Керра — Ньюмена (27). Эквато- риальные геодезические в пространстве-времени Керра (28). Движение нейтральных частиц в пространстве Эрнста — Шварцшильда (31). Движение заряженных частиц в однород- ном магнитном поле около черных дыр (34). Малые колеба- ния около круговых орбит (41).	
Глава II. Безмассовые поля в пространстве-времени Керра	47
§ 4. Скалярное поле	47
Лагранжев формализм (47). Законы сохранения (49). Формали- зм изотропной тетрады (52). Разделение переменных (55).	
§ 5. Электромагнитное поле	59
Уравнения Максвелла в формализме Ньюмена — Пенроуза (59). Потенциалы Дебая (63).	
§ 6. Гравитационные возмущения	66
Метод Тьюкольского (67). Вакуумные возмущения метрики (70) Соотношение между ψ_0 и ψ_4 (75). Потенциалы Дебая для $s = \pm 1$ (77).	
§ 7. Разделение переменных	79
Уравнение Тьюкольского (79). Симметрия $s \leftrightarrow -s$ (82). Реше- ния однородного радиального уравнения (86). Возмущения при наличии источников (89). Факторизованные функции Гри- на (91). Преобразование радиального уравнения к уравнению к уравнению с вещественным потенциалом (96). Длинноволно- вое приближение (97). Разложение по гармоникам и законы сохранения (99).	
Глава III. Стационарные внешние поля вокруг черных дыр	104
§ 8. Аксиально-симметричные поля (104)	104
Соотношение между ${}_s\psi$ и $-{}_s\psi$ (104). Функции Грина (108). Потенциалы Дебая и возмущения полей (111). Точечный за- ряд на оси симметрии (115).	

§ 9. Однородное электромагнитное поле	117
Векторы Киллинга и потенциалы (117). Асимметричное скрещенное поле (121). Сила, действующая на дыру (124). Потеря углового момента (127). Прецессия углового момента заряженной дыры в асимметричном поле (130).	
Глава IV. Излучение частиц, движущихся по геодезическим	132
§ 10. Релятивистские поправки к гравитационному излучению при квазиэллиптическом движении	132
Постньютоновские поправки в переменных действии — угол (133). Тонкая структура спектра излучения (135). Гравитационное излучение, поглощаемое черной дырой (138).	
§ 11. Геодезическое синхротронное излучение	139
Радиальные функции в приближении ВКБ (140). Излучение скалярных волн (146). Электромагнитное излучение (149). Гравитационное излучение (151). Сравнение спектров ГСИ полей с различным спином (154).	
§ 12. Радиационное трение в поле Керра	155
Радиационные функции Грина (156). Потери энергии и момента при излучении (159). Уравнения движения точечной частицы с учетом реакции излучения и законы сохранения (161). Длинноволновое приближение и статический предел (164).	
Глава V. Синхротронное излучение релятивистских частиц	167
§ 13. Мультипольное разложение СИ; влияние радиационного трения; квантовые эффекты	167
Формализм изотропной тетрады в пространстве-времени Минковского (168). Распределение мощности СИ по мультиполям (170). Классическое радиационное трение (173). Спектр и поляризация интегрального излучения (174). Вероятность перехода с переворотом спина при произвольной энергии электрона (178).	
§ 14. Синхротронное излучение в окрестности черных дыр	180
Длина дуги формирования высокочастотного импульса (180). Излучение скалярных волн (181). Излучение электромагнитных волн (185). Зависимость спектра от спина поля излучения (187). СИ в медленно изменяющемся гравитационном поле (188).	
Глава VI. Взаимодействие частиц и волн	192
§ 15. Мазер-эффект в квазиклассических системах	192
Условия возникновения отрицательного поглощения (192). Отрицательное поглощение релятивистскими электронами на гармониках циклотронной частоты (199). Неоднородное магнитное поле (200). Скрещенные поля (200).	
§ 16. Отрицательное поглощение электромагнитных волн частицами вблизи черных дыр	201
Вынужденные колебания около круговых орбит (201). Мощность поглощения (204). Коэффициенты усиления в нерелятивистском случае (207).	
§ 17. Индуцированное гравитационное излучение	211
Взаимодействие пробной частицы в поле Керра с гравитационными волнами (211). Сечение отрицательного поглощения (212).	
Глава VII. Массивные поля около черных дыр	215
§ 18. Черные дыры и калибровочные поля	216
Квантование магнитного заряда (216). «Цветные» черные ды-	

ры (217). Черные дыры Ву — Янга (219). Метрика Керра — Ньюмена — де Ситтера (223).	
§ 19. Массивное скалярное поле	225
Разделение переменных (227). Супerrрадиация и квантовое рождение частиц (229). Квазистационарные состояния (234). Супerrрадиация и квантовые процессы во внешнем магнитном поле (241).	
§ 20. Массивное поле со спином $1/2$	247
Уравнение Дирака в формализме Ньюмена — Пенроуза (247). Интегралы движения (253). Разделение переменных (256). Квантовое рождение частиц (259). Аксиальные аномалии и испарение дайонов (264). Квазистационарные состояния (266). Нулевые моды (269).	
§ 21. Массивное векторное поле	270
Разделение переменных (272). Квазисвязанные состояния в поле Шварцшильда (273).	
Дополнение. Спиновые сферические, сфероидальные и родственные им функции	275
Спиновые сферические функции (275). Спиновые сфероидальные функции (277). «Массивные» угловые гармоники спина $1/2$ (279).	
Литература	281

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вероятно, ни одно физическое явление не породило столь разностороннего и неослабевающего интереса не только со стороны специалистов, но и непрофессионалов, как феномен черной дыры. Красота и грандиозность картины гравитационного коллапса, обилие неожиданных физических следствий, из которых наиболее впечатляюще квантовые свойства черных дыр, надолго приковали внимание исследователей к этому замечательному предсказанию эйнштейновской теории тяготения. На протяжении последних полутора десятилетий черные дыры интенсивно изучались в самых различных аспектах — от астрофизических приложений до сугубо теоретических построений в квантовой гравитации. Не будет преувеличением утверждать, что представление о черных дырах убедительно доказало свою плодотворность в теории гравитации даже независимо от того, будут ли получены достоверные доказательства существования реальных черных дыр в космосе. И все же именно астрофизические предсказания, основанные на гипотезе о черных дырах, являются самыми важными и интригующими. Астрофизическим аспектам теории черных дыр посвящена обширная литература [1—4], и мы почти не будем непосредственно касаться их в этой книге. Однако проводимое в книге исследование физических процессов, которые могут происходить в окрестности черных дыр, как раз призвано служить мостом между теорией и наблюдениями.

Истоки представлений о черных дырах восходят к XVIII веку. Хокинг и Эллис привели в своей книге [5] заметку Лапласа, датированную 1799 годом, к которой на основании ньютоновской теории тяготения и предположения о конечной скорости распространения световых корпускул доказывалось, что достаточно компактное массивное тело должно быть невидимым для внешнего наблюдателя. Позднее было обнаружено более раннее научно обоснованное предсказание феномена черной дыры, принадлежащее английскому физiku Джону Мичелу [6], опередившему Лапласа на 15 лет. Этот исторический спор, конечно, носит академический характер, поскольку современное представление о черных дырах как объектах, обладающих горизонтом событий, могло возникнуть только после создания общей теории относительности. Приоритет Шварцшильда [7], сформулировавшего свое знаменитое решение лишь двумя месяцами позже опубликования Эйн-

штейном сообщения об уравнениях релятивистской теории тяготения, не вызывает сомнений.

Открытие Керром [8] более общего решения, описывающего вращающуюся черную дыру, и доказательство теоремы о его единственности в классе стационарных асимптотически-плоских метрик с несингулярным горизонтом событий послужили стартовой площадкой для теоретического изучения физических процессов в окрестности черных дыр. Высокая степень симметрии керровского решения обеспечила возможность провести аналитически и в весьма изящной форме исследование целого ряда уравнений классической физики, описывающих поведение частиц и полей в метрике Керра. В особенности плодотворным оказалось применение для этой цели формализма Ньюмена — Пенроуза, позволившее Тьюкольскому [9] осуществить полное разделение переменных в уравнениях безмассовых полей различного спина. Предсказание Зельдовичем и Мизнером явления суперрадиации в метрике Керра [10—12] и последовавший затем замечательный результат Хокинга [13] об испарении невращающейся черной дыры открыли новый этап квантовой теории черных дыр [14]. Черная дыра оказалась одним из немногочисленных объектов, открывающих принципиальную возможность опытной проверки предсказаний квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени [15—16]. Такая теория аналогична развивавшейся в тридцатые годы полуклассической электродинамике, в которой рассматривалось взаимодействие квантовых систем с классическим электромагнитным полем и которая, как можно надеяться, является хорошим приближением к (пока не созданной) квантовой теории гравитации в условиях, когда квантовой природой самого гравитационного поля можно пренебречь. Изучение квантовых процессов в черных дырах оказало стимулирующее влияние на развитие этого направления, в рамках которого удалось выяснить многие нетривиальные особенности будущей полной квантовой теории фундаментальных взаимодействий, включающей гравитацию.

В дальнейшем много внимания уделялось изучению классических решений типа черных дыр в аспекте квантования самого гравитационного поля. Было показано, что явление квантового испарения и необходимость приписывания черным дырам определенного значения энтропии можно истолковать исходя из соображений, связанных с квантованием гравитации. По-видимому, именно это привело Хокинга к идее формулировки квантовой теории гравитации на основе евклидова действия и математическому воплощению уилеровской концепции пространственно-временной пены. В этом контексте небезынтересно отметить, что решения Шварцшильда, Керра, Тауба-НУТ и некоторые другие, генетически связанные с ними, в евклидовом секторе (т. е. при мнимых значениях временной координаты) аналогичны инстантонам в теории Янга-Миллса. Это создает возможность выхода за рамки теории воз-

мущений при исследовании физических процессов в квантовой гравитации [17, 18].

В связи с созданием теорий супергравитации возник вопрос о существовании суперпартнеров классических черных дыр. Поскольку конечная температура несовместима с суперсимметрией из-за различия теплового распределения для бозонов и фермионов, следует ожидать, что черные дыры с ненулевой поверхностной гравитацией (температурой) не будут обладать суперструктурой. Запрет снимается для экстремальной дыры, описываемой метрикой Рейсснера-Нордстрема, заряд которой равен (в геометрических единицах) ее массе, имеющей нулевую температуру. И действительно, такая черная дыра может иметь нетривиальные «суперволосы» (статическое поле спина $3/2$, регулярное на горизонте событий и спадающее на бесконечности) и вписывается в супермультиплет $N=2$ расширенной супергравитации с некалибровочной группой $O(2)$. Известно и соответствующее точное решение уравнений $N=2$ супергравитации [19].

Круг вопросов, рассматриваемых в настоящей книге, в значительной степени связан с интересами автора. Особое внимание в ней уделяется получению точных и приближенных решений полевых уравнений для безмассовых и массивных полей различного спина в пространстве-времени Керра, исследованию излучения (спонтанного и вынужденного) частиц, движущихся в окрестности черных дыр, изучению воздействия стационарных внешних полей на вращающуюся черную дыру. Дается трактовка электромагнитных и гравитационных возмущений керровской черной дыры на основе техники потенциалов Дебая, позволяющая существенно упростить математический аппарат. Развита техника функций Грина для возмущений различного спина, в частности теория аксиально-симметричных возмущений в терминах функций Грина с неразделенными переменными. Анализируются квазистационарные состояния массивных полей, их суперрадиантное возбуждение. Рассматривается возможность «управления» суперрадиацией и квантовым рождением частиц в черных дырах за счет внешних воздействий на дыру. Излагаемый материал основан либо на оригинальных результатах автора, либо представляет собой переработку известных ранее результатов на основе развиваемой техники вычислений.

В книге используется система единиц $\hbar=c=G=1$; сигнатура метрики $(+---)$, тензор Римана определен согласно

$$R^{\mu}_{\nu\lambda\tau} = \Gamma^{\mu}_{\nu\tau,\lambda} - \dots$$

Автор благодарит проф. И. М. Тернова за замечания, касающиеся глав VI и VII, а также своих коллег В. И. Петухова, А. А. Матюхина, А. Н. Алиева, Г. А. Чинова, аспирантов Д. Нуньеса, А. В. Тихоненко, М. В. Морозова, А. А. Ершова, совместно с которыми были получены отдельные результаты. Автор глубоко признателен М. М. Колесниковой за помощь при подготовке рукописи книги.

ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНА, СОДЕРЖАЩИЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

§ 1. ВРАЩАЮЩАЯСЯ ЗАРЯЖЕННАЯ ЧЕРНАЯ ДЫРА

Существующие представления о черных дырах основываются на теоремах, доказываемых средствами дифференциальной геометрии многообразий. Изложение результатов теории имеется в книгах [2, 5, 224], и мы не будем повторять их здесь. Отсылая читателя за подробностями к монографиям и сборникам [1, 2, 5, 14, 21—23], а также оригинальным статьям и обзорам [23—26], ограничимся кратким перечислением основных положений, лежащих в основе современных представлений о черных дырах.

Наиболее общее семейство вакуумных решений уравнений Эйнштейна, описывающих стационарные асимптотически плоские пространства-времени с несингулярным горизонтом событий и регулярные всюду вне горизонта, обладает осевой симметрией [25] и совпадает с двухпараметрическим семейством Керра [8]. Два независимых параметра M и a задают массу и момент вращения черной дыры. Теоремы, подкрепляющие это утверждение, были сформулированы в работах [27—28] для невращающейся черной дыры и обобщены на метрику Керра в [29, 30]. Описывающие черные дыры решения невакуумных уравнений Эйнштейна, могут характеризоваться большим числом параметров. Так, в случае системы уравнений Эйнштейна — Максвелла, перечисленными свойствами обладает семейство решений Керра — Ньюмена [31], имеющее четыре параметра M , a , Q и P , где Q — электрический, а P — магнитный заряды, единственность этого семейства доказана в [32]. Имеются решения системы уравнений Эйнштейна — Янга — Миллса, описывающие черные дыры, несущие калибровочные (цветовые) заряды [33], а также системы Эйнштейна — Янга — Миллса — Хиггса со спонтанно нарушенной симметрией, описывающие точечные гравитирующие монополи и дайоны, скрытые под горизонтом событий [255—260]. В расширенной $N=2$ супергравитации найдены решения, описывающие экстремально заряженные черные дыры, обладающие фермионной структурой. Существенно, что все перечисленные решения известны для полей нулевой массы, массивных собственных внешних полей черной дыры иметь не могут [34].

Поле Керра — Ньюмена

Откладывая обсуждение решений с магнитными и калибровочными зарядами до § 18, рассмотрим подробнее решение Керра — Ньюмена, описывающее вращающуюся электрически заряженную

черную дыру [31]. В координатах Бойера — Линдквиста [35] квадрат интервала пространства-времени имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2, \quad (1)$$

где введены стандартные обозначения

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2; \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (2)$$

4-потенциал (1-форма) электромагнитного поля, определяемый соотношением

$$A = A_\mu dx^\mu = \frac{Qr}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi), \quad (3)$$

при $a=0$ не отличается от потенциала точечного заряда в пространстве Минковского. Дополнительное слагаемое, пропорциональное a , на пространственной бесконечности совпадает с потенциалом магнитного диполя величины $\mu = aQ$. Отличные от нуля компоненты контравариантного метрического тензора равны (координаты t, r, θ, φ нумеруем 0, 1, 2, 3)

$$g^{00} = [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] (\Sigma \Delta)^{-1}; \quad g^{11} = -\Delta \Sigma^{-1}; \quad g^{22} = -\Sigma^{-1}; \\ g^{33} = (a^2 \sin^2 \theta - \Delta) (\Delta \Sigma \sin^2 \theta)^{-1}; \quad g^{03} = (2Mr - Q^2) a (\Sigma \Delta)^{-1}. \quad (4)$$

Для метрики Керра — Ньюмена имеется тридцать ненулевых символов Кристоффеля, из которых двадцать два попарно равны

$$\Gamma_{01}^0 = -\frac{pb^2}{\Delta}; \quad \Gamma_{13}^0 = \frac{a \sin^2 \theta}{\Delta} (pb^2 + 2qr); \quad \Gamma_{32}^0 = -\frac{qa^3}{\Sigma} \sin^2 \theta \sin 2\theta; \\ \Gamma_{00}^1 = -\frac{\Delta p}{\Sigma}; \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{r}{\Sigma} + \frac{M-r}{\Delta}; \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\Delta \Gamma_{11}^2 = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma}; \\ \Gamma_{22}^1 = -\frac{r\Delta}{\Sigma}; \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{r}{\Sigma}; \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Sigma} (r + pa^2 \sin^2 \theta); \\ \Gamma_{20}^0 = \Sigma \Gamma_{00}^2 = \frac{qa^2}{\Sigma} \sin 2\theta; \quad \Gamma_{03}^1 = \frac{a \Delta p \sin^2 \theta}{\Sigma}; \quad \Gamma_{03}^2 = -\frac{qab^2 \sin 2\theta}{\Sigma^2}; \quad (5) \\ \Gamma_{33}^2 = -\frac{\sin 2\theta}{2\Sigma} \left[b^2 - 2a^2 \sin^2 \theta q \left(2 + \frac{a^2 \sin 2\theta}{\Sigma} \right) \right]; \quad \Gamma_{02}^3 = \frac{2qa}{\Sigma} \operatorname{ctg} \theta; \\ \Gamma_{13}^3 = \frac{r}{\Delta} (1 + 2q) + a^2 p \frac{\sin^2 \theta}{\Delta}; \quad \Gamma_{32}^3 = \\ = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\Delta} [(1 + 2q) (b^2 - 2qa^2 \sin^2 \theta) - 2qa^2 b^2 \Sigma^{-1} \sin^2 \theta],$$

где обозначено

$$b^2 = r^2 + a^2; \quad p = \Sigma^{-2} [rQ^2 + M(\Sigma - 2r^2)]; \quad q = (Q^2 - 2Mr) (\Sigma)^{-1}. \quad (6)$$

Символы Кристоффеля $\Gamma_{01}^0, \Gamma_{13}^0, \Gamma_{11}^1, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{33}^1, \Gamma_{03}^1, \Gamma_{00}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{01}^3, \Gamma_{13}^3$ являются четными функциями разности $[\pi/2 - \theta]$ и не обращаются в нуль в экваториальной плоскости метрики Керра. Остальные компоненты связности нечетны относительно отражения в плоскости $\theta = \pi/2$, где они принимают нулевые значения. Это полезно иметь в виду при решении уравнений движения частиц.

Отличные от нуля компоненты тензора электромагнитного поля равны

$$F_0^1 = -\frac{1}{a} F_3^1 = \frac{\Delta Q}{\Sigma^3} (\Sigma - 2r^2); F_0^2 = -\frac{a}{b^2} F_3^2 = \frac{Qra^2}{\Sigma^3} \sin 2\theta, \quad (7)$$

что соответствует при $r \rightarrow \infty$ суперпозиции кулонова поля и поля магнитного диполя.

Линейный элемент (1) не зависит от координат t и φ , поэтому векторы

$$\xi_{(t)} = \xi_{(t)}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial t} \quad (8)$$

и

$$\xi_{(\varphi)} = \xi_{(\varphi)}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (9)$$

являются векторами Киллинга, порождающими сдвиги по времени и вращения вокруг оси симметрии. Векторы Киллинга $\xi_{(t)}$ и $\xi_{(\varphi)}$ не ортогональны между собой

$$\xi_{(t)} \cdot \xi_{(\varphi)} = g_{0\varphi}. \quad (10)$$

Симметрия электромагнитного поля относительно преобразований, задаваемых векторами Киллинга, выражается в равенстве нулю производных Ли от 4-потенциала (3) вдоль векторных полей (8), (9)

$$\mathcal{L}_\xi A^\mu = \xi^\nu A_{;\nu}^\mu - \xi_{;\nu}^\mu A^\nu = 0. \quad (11)$$

Вектор $\xi_{(t)}$ времениподобен в области, ограниченной неравенством

$$\xi_{(t)}^2 = g_{00} = 1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} > 0, \quad (12)$$

и становится изотропным на поверхности эргосферы

$$r_0(\theta) = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (13)$$

представляющей собой эллипсоид вращения. Внутри эргосферы вектор $\xi_{(t)}$ пространственноподобен, однако существует линейная комбинация векторов Киллинга

$$\xi = \xi_{(t)} + \Omega \xi_{(\varphi)}, \quad (14)$$

представляющая собой времениподобный вектор Киллинга внутри эргосферы, если выполняется неравенство

$$\Omega_- < \Omega < \Omega_+, \quad (15)$$

где

$$\Omega_{\pm} = \xi_{(\varphi)}^{-2} (\xi_{(t)} \cdot \xi_{(\varphi)} \pm \sqrt{(\xi_{(t)} \cdot \xi_{(\varphi)})^2 - \xi_{(t)}^2 \cdot \xi_{(\varphi)}^2}) = g_{33}^{-1} (-g_{03} \pm \sqrt{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}}). \quad (16)$$

Поверхность, на которой Ω_+ и Ω_- сливаются, является горизонтом событий, ее положение определяется бóльшим корнем уравнения

$$g_{00}g_{33} - g_{03}^2 = \Delta \sin^2 \theta = 0, \quad (17)$$

откуда находим $r = r_+$, где

$$r_{\pm} = M_{\pm} \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}. \quad (18)$$

Величина $\Omega_+(r_+) = \Omega_-(r_+) = \Omega_H$ играет роль угловой скорости вращения горизонта; в согласии с общей теоремой [26] она не зависит от угла θ

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \quad (19)$$

Горизонт событий представляет собой изотропную гиперповерхность, пространственное сечение которой имеет топологию сферы. Площадь двумерной поверхности горизонта вычисляется по формуле

$$\mathcal{A} = \oint \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}} d\varphi d\theta, \quad (20)$$

что приводит к результату

$$\mathcal{A} = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 4\pi[2M^2 - Q^2 + 2M(M^2 - a^2 - Q^2)^{1/2}]. \quad (21)$$

Согласно теореме Хокинга [25] площадь поверхности горизонта событий черной дыры, погруженной в материальную среду, тензор энергии-импульса которой удовлетворяет условиям энергодоминантности, не может убывать. Масса и момент вращения дыры по отдельности могут уменьшаться, при этом, полностью потеряв вращательный момент, черная дыра окажется имеющей массу не менее величины

$$M_{\text{ir}} = (\mathcal{A}/16\pi)^{1/2}, \quad (22)$$

которая была названа «неуменьшаемой» массой черной дыры [37, 38]. Закон неубывания площади горизонта событий имеет общую природу с законом возрастания энтропии, его можно связать с потерей информации о состоянии вещества, оказавшегося под горизонтом событий. Если бы черная дыра не обладала некоторой

энтропией, то при поглощении, скажем, нагретого газа во внешнем пространстве происходило бы убывание энтропии. Привлечение квантовых соображений устраняет опасность противоречия со вторым началом термодинамики, ибо оказывается, что в квантовой гравитации энтропия черной дыры действительно пропорциональна площади поверхности горизонта событий (21) в единицах квадрата планковской длины $l_{Pl} = (\hbar G/c^3)^{1/2} \approx 2 \cdot 10^{-33}$ см:

$$S = \mathcal{A} / (4l_{Pl}^2). \quad (23)$$

Это отвечает и более ранним расчетам эффекта рождения частиц в черных дырах в рамках полуклассической теории [13, 14]. Суммарная энтропия черной дыры и поглощаемого вещества при этом не убывает, поскольку при поглощении увеличивается масса (а также, возможно, уменьшается вращательный момент) черной дыры, вследствие чего возрастает площадь поверхности горизонта событий. Следует отметить, что знаменатель в (23) крайне мал, поэтому при макроскопическом изменении площади горизонта энтропия черной дыры изменяется на весьма большую величину.

На горизонте событий постоянна линейная комбинация компонент 4-потенциала, имеющая смысл электростатического потенциала горизонта для наблюдателя, вращающегося вместе с горизонтом

$$V_H = A_0 + \Omega_H A_\varphi = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2}. \quad (24)$$

Постоянна также величина, получившая название «поверхностной гравитации» черной дыры, которая равна ускорению (в единицах координатного времени) частицы, удерживаемой в покое на горизонте, в инвариантном виде

$$\kappa = |l'_{\mu;\nu} n'^{\mu} l'^{\nu}|, \quad (25)$$

где вектор l'_{μ} определяется формулой (14) при $\Omega = \Omega_H$ (т. е. является изотропным вектором, лежащим на гиперповерхности $r = r_+$), а n'^{μ} — другой изотропный вектор, нормированный условием $l'_{\mu} n'^{\mu} = 1$. Для метрики Керра — Ньюмена поверхностная гравитация горизонта равна

$$\kappa \equiv \kappa_+ = \frac{(r_+ - M)}{r_+^2 + a^2}. \quad (26)$$

При поглощении черной дырой порции вещества с энергией dM , несущего вращательный момент (относительно оси симметрии) dJ и электрический заряд dQ , изменение массы черной дыры сопровождается изменением площади поверхности горизонта событий согласно соотношению

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} d\mathcal{A} + \Omega_H dJ + V_H dQ, \quad (27)$$

которое устанавливается на основе уравнений движения вещества. Выразив $d\mathcal{A}$ через энтропию черной дыры, можно придать равенству (27) смысл первого начала термодинамики, если отождествить величину $\kappa/2\pi$ с температурой черной дыры (в обычных единицах $T_H = \hbar\kappa/2\pi c$). Обоснованность этого шага была доказана Хокингом [13], установившим, что черная дыра возбуждает квантовое рождение частиц с тепловым спектром, характеризующимся температурой $T_H = \kappa/2\pi$. Тем самым обнаруживается удивительное единство законов классической механики, теории гравитации, квантовой теории поля и термодинамики.

Помимо существования векторных полей Киллинга, симметрия пространства-времени может выражаться наличием симметричных тензорных полей более высокого ранга, удовлетворяющих уравнениям Киллинга [41—45]. Для метрики Керра — Ньюмена имеется нетривиальный тензор Штеккеля — Киллинга второго ранга $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$, такой, что

$$a_{\mu\nu;\lambda} + a_{\nu\lambda;\mu} + a_{\lambda\mu;\nu} = 0. \quad (28)$$

В координатах Бойера — Линдквиста отличны от нуля его компоненты [24, 25]

$$\begin{aligned} a_{00} &= a^2 [1 + (Q^2 - 2Mr) \cos^2 \theta / \Sigma]; \quad a_{11} = -a^2 \cos^2 \theta \Sigma / \Delta; \quad a_{22} = r^2 \Sigma; \\ a_{03} &= -a \sin^2 \theta [\Delta a^2 \cos^2 \theta + r^2 (r^2 + a^2)] / \Sigma; \\ a_{33} &= [r^2 (r^2 + a^2)^2 + \Delta a^4 \sin^2 2\theta / 4] \sin^2 \theta / \Sigma. \end{aligned} \quad (29)$$

Соответствующая симметрия электромагнитного поля выражается соотношением

$$a_{\mu[\nu} F_{\lambda]}{}^\mu = 0, \quad (30)$$

из которого вытекает равенство для тензора Риччи $a_{\mu[\nu} R_{\lambda]}{}^\mu = 0$. Выполнение условий (28), (30) обеспечивает существование, помимо энергии и проекции момента количества движения на ось симметрии, еще одного интеграла движения — «третьего» интеграла Картера [24] для заряженных частиц в поле Керра Ньюмена: $a_{\mu\nu} (dx^\mu/ds) (dx^\nu/ds)$.

Тензор Штеккеля — Киллинга можно выразить через антисимметричный тензор Яно — Киллинга $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$ [46], удовлетворяющий уравнению

$$f_{\mu\nu;\lambda} + f_{\mu\lambda;\nu} = 0, \quad (31)$$

в виде свертки

$$a_{\mu\nu} = f_{\mu\lambda} f^\lambda{}_\nu. \quad (32)$$

Условие (28) при этом удовлетворяется автоматически в силу (31), а соотношение (30) будет иметь место, если

$$f_{\mu[\nu} F_{\lambda]}{}^\mu = 0. \quad (33)$$

Заметим, что в силу уравнения (31) тензор $f_{\mu\nu;\lambda}$ полностью антисимметричен. Явное выражение $f_{\mu\nu}$ для поля Керра — Ньюмена дано ниже.

Аналитическое расширение

Метрика Керра — Ньюмена в координатах Бойера — Линдквиста (1) имеет особенность на поверхностях $r=r_{\pm}$ (значение r_{-} второго корня уравнения (17) задает положение внутреннего горизонта черной дыры — горизонта Коши). Если ввести запаздывающую систему координат Эддингтона — Финкельштейна с помощью замены 1-форм

$$dt = du + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr; \quad d\varphi = d\Phi + \frac{a}{\Delta} dr, \quad (34)$$

метрика становится несингулярной на горизонте событий

$$ds^2 = \Delta (du - a \sin^2 \theta d\Phi)^2 / \Sigma - \sin^2 \theta [(r^2 + a^2) d\Phi - a du]^2 / \Sigma - \Sigma d\theta^2 + 2dr (du - a \sin^2 \theta d\Phi). \quad (35)$$

Она, однако, несимметрична относительно отражения времени из-за наличия члена $2drdu$. Это проявляется в том, что поверхность $r=r_{+}$ не пропускает направленные в будущее времениподобные и изотропные кривые, выходящие из области $r < r_{+}$ во внешнюю область. Альтернативная система опережающих координат задается подстановкой

$$dt = dv - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\varphi = d\Phi - \frac{a}{\Delta} dr; \quad (36)$$

она также несингулярна при $r=r_{+}$, однако в ней поверхность $r=r_{+}$ пропускает направленные в будущее мировые линии частиц лишь из черной дыры наружу. Явные выражения для u и v можно получить, интегрируя соотношение $dr^* = (r^2 + a^2) dr / \Delta$, задающее «черепашую» координату

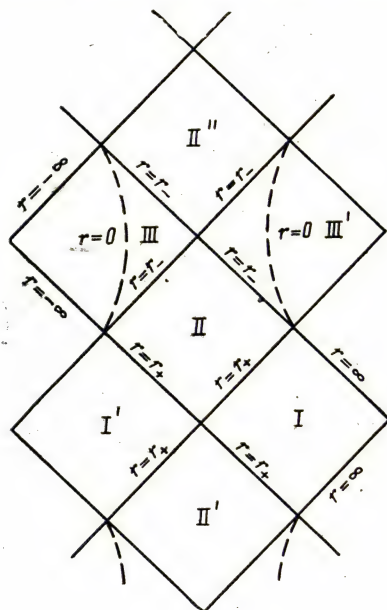
$$r^* = r + (\kappa_{+})^{-1} \ln|r - r_{+}| - (\kappa_{-})^{-1} \ln|r - r_{-}|. \quad (37)$$

Из (34) и (36), очевидно, будем иметь $u = t - r^*$; $v = t + r^*$. При больших r черепашая координата близка к r , при $r \rightarrow r_{+}$ она стремится к $-\infty$. В области $r_{-} < r < r_{+}$ координата r^* вновь пробегает бесконечный интервал, причем $r^* \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow r_{-}$. Аналитическое расширение пространства-времени Керра — Ньюмена до геодезически полного (с точностью до наличия кольцевой сингулярности $r=0$ при $\theta=\pi/2$) многообразия осуществляется с помощью введения координат типа Крускала, которые в области $r > r_{+}$ связаны с u и v соотношениями

$$U = -\exp(-\kappa_{+}u/2); \quad V = \exp(\kappa_{+}v/2) \quad (38)$$

и принимают в ней значения $-\infty < U < 0$, $0 < V < \infty$. Распростране-

ние областей изменения U и V на полные прямые $(-\infty, \infty)$ приводит к многообразию, состоящему из четырех областей I, II, I' и II', показанных на рис. 1. Область II, в которой $U = \exp(-\kappa_+ u/2)$, $V = \exp(\kappa_+ v/2)$, изометрична области $r_- < r < r_+$ в системе координат (36), область II' изометрична той же области в системе координат (35), кроме того, возникает еще один экземпляр внешнего пространства $r > r_+$ (область I'), в которое можно попасть, двигаясь по направленным в будущее времениподобным или изотропным линиям из области II.



Подобное аналитическое продолжение можно далее провести и на внутреннем горизонте r_- , в результате появляется бесконечная последовательность чередующихся областей типа I и II, изображенная на рис. 1 (подробнее см. в [5, 35, 36]). Области типа

Рис. 1. Диаграмма Пенроуза аналитического продолжения метрики Керра—Ньюмена при $\theta = \pi/2$. Точка $r=0$ отвечает кольцевой сингулярности при $\theta = \pi/2$. Многообразие аналитически продолжается в область $-\infty < r < 0$ через диск $r=0$, $0 \leq \theta < \pi/2$, границей которого является кольцевая сингулярность

III, лежащие внутри поверхности $r=r_-$, содержат сингулярность $r=0$ при $\theta = \pi/2$ (при этом обращается в нуль величина Σ в (1), а инварианты кривизны бесконечны); сингулярность метрики Керра—Ньюмена является таким образом границей диска $r=0$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, внутри которого метрика не имеет особенностей. Ее можно поэтому аналитически продолжить внутрь кольцевой сингулярности на область отрицательных значений координаты r вплоть до $r \rightarrow -\infty$. Это приводит к усложнению причинной структуры многообразия. Вблизи кольцевой сингулярности вектор Киллинга $\xi_{(\varphi)}$ становится времениподобным, а его замкнутые орбиты будут представлять собой замкнутые времениподобные кривые. Эти патологические особенности, однако, не могут повлиять на происходящее во внешней области $r > r_+$. Небезынтересно также отметить, что эффекты поляризации вакуума квантовой теории поля приводят к разрушению внутреннего горизонта.

Поле Керра — Ньюмена в формализме Ньюмена — Пенроуза [48—50]

Метрика Керра — Ньюмена принадлежит к вырожденному типу D по классификации Петрова. Как следует из теоремы Гольдберга — Сакса [54], главные изотропные конгруэнции в этом случае являются геодезическими и бессдвиговыми. В координатах Бойера — Линдквиста эти кривые определяются системой уравнений

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}; \quad \frac{dr}{d\lambda} = \pm 1; \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = 0; \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{a}{\Delta}, \quad (39)$$

где λ — аффинный параметр. При построении тетрады Ньюмена — Пенроуза естественно в качестве вещественных изотропных векторов выбрать векторы, касательные к кривым (39). Для верхнего знака в (39) имеем

$$l^\mu = \left\{ \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right\}. \quad (40)$$

Второй изотропный вектор, нормированный условием

$$l^\mu n_\mu = 1, \quad (41)$$

получим, умножая (39) с нижним знаком $dr/d\lambda$ на $\Delta/2\Sigma$,

$$n^\mu = \frac{1}{2\Sigma} \{r^2 + a^2, -\Delta, 0, a\}. \quad (42)$$

Ортогональный к l^μ и n^μ комплексный изотропный вектор m^μ , удовлетворяющий условию нормировки

$$m^\mu m_\mu^* = -1, \quad (43)$$

можно задать в виде

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left\{ ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right\}. \quad (44)$$

Теперь нетрудно убедиться в том, что метрический тензор допускает разложение

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu m_\nu^* - m_\mu^* m_\nu, \quad (45)$$

где ковариантные компоненты векторов изотропной тетрады равны

$$l_\mu = \{1, -\Sigma/\Delta, 0, -a \sin^2 \theta\}; \quad n_\mu = 1/2\Sigma \{\Delta, \Sigma, 0, -\Delta a \sin^2 \theta\}; \\ m_\mu = [\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)]^{-1} \{ia \sin \theta, 0, -\Sigma, -i \sin \theta (r^2 + a^2)\}. \quad (46)$$

Описанная тетрада была введена Киннерсли [52] (в координатах Керра), случай метрики Керра — Ньюмена рассматривался в [53].

Обратимся к построению спиновых коэффициентов для данной тетрады. Поскольку векторы l^μ и n^μ направлены вдоль вырожден-

ных изотропных направлений тензора Вейля, обращаются в нуль спиновые коэффициенты

$$\kappa = l_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu; \lambda = -n_{\mu;\nu} m^*{}^\mu m^*{}^\nu; \nu = -n_{\mu;\nu} m^*{}^\mu n^\nu; \sigma = l_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu, \quad (47)$$

а из всех тетрадных проекций тензора Вейля

$$\Psi_0 = -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu m^\nu l^\lambda m^\tau; \quad \Psi_1 = -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu n^\nu l^\lambda m^\tau; \quad \Psi_2 = -C_{\mu\nu\lambda\tau} m^*{}^\mu n^\nu l^\lambda m^\tau; \\ \Psi_3 = -C_{\mu\nu\lambda\tau} m^*{}^\mu n^\nu l^\lambda n^\tau; \quad \Psi_4 = -C_{\mu\nu\lambda\tau} m^*{}^\mu n^\nu m^*{}^\lambda n^\tau \quad (48)$$

отлична от нуля лишь

$$\Psi_2 = -\frac{M}{(r - ia \cos \theta)^3} + \frac{Q^2}{\Sigma (r - ia \cos \theta)^2}. \quad (49)$$

Далее в силу выбора для конгруэнции изотропных геодезических аффинного параметра обращается в нуль также спинный коэффициент

$$\epsilon = 1/2 (l_{\mu;\nu} n^\mu l^\nu - m_{\mu;\nu} m^*{}^\mu l^\nu). \quad (50)$$

Отличные от нуля спиновые коэффициенты

$$\alpha = 1/2 (l_{\mu;\nu} n^\mu m^*{}^\nu - m_{\mu;\nu} m^*{}^\mu m^*{}^\nu); \quad \beta = 1/2 (l_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu} m^*{}^\mu m^\nu); \\ \gamma = 1/2 (l_{\mu;\nu} n^\mu n^\nu - m_{\mu;\nu} m^*{}^\mu n^\nu); \quad \mu = -n_{\mu;\nu} m^*{}^\mu m^\nu; \\ \pi = -n_{\mu;\nu} m^*{}^\mu l^\nu; \quad \rho = l_{\mu;\nu} m^\mu m^*{}^\nu; \quad \tau = l_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu \quad (51)$$

можно вычислить разлагая ковариантные производные от векторов изотропной тетрады снова по векторам тетрады

$$l_{\mu;\nu} = 2 \operatorname{Re} [\gamma l_\mu l_\nu - (\alpha + \beta^*) l_\mu m_\nu - \tau m_\mu^* l_\nu + \rho m_\mu^* n_\nu]; \\ n_{\mu;\nu} = 2 \operatorname{Re} [-\gamma n_\mu l_\nu + (\alpha + \beta^*) n_\mu m_\nu + \pi m_\mu n_\nu - \mu m_\mu m_\nu^*]; \\ m_{\mu;\nu} = (\gamma - \gamma^*) m_\mu l_\nu + (\alpha^* - \beta) m_\mu m_\nu^* + (\beta^* - \alpha) m_\mu m_\nu + \\ + \pi^* l_\mu n_\nu - \mu^* l_\mu m_\nu - \tau n_\mu l_\nu + \rho n_\mu m_\nu \quad (52)$$

(в этих формулах учтено, что $\epsilon = \kappa = \sigma = \lambda = \nu = 0$). Явный вид спинных коэффициентов следующий:

$$\rho = -(r - ia \cos \theta)^{-1}; \quad \tau = -ia \sin \theta / \sqrt{2} \Sigma; \\ \pi = ia \sin \theta (r - ia \cos \theta)^{-2} / \sqrt{2}; \quad \beta = -\rho^* \operatorname{ctg} \theta / 2 \sqrt{2}; \quad \alpha = \pi - \beta^*; \\ \mu = \Delta \rho / 2 \Sigma; \quad \gamma = \mu + (r - M) / 2 \Sigma, \quad (53)$$

причем выполняются соотношения

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{\mu}{\mu^*} = \frac{\tau}{\pi^*} = \frac{\pi}{\tau^*} = \frac{r + ia \cos \theta}{r - ia \cos \theta}. \quad (54)$$

Все тетрадные проекции тензора Риччи обращаются в нуль за исключением

$$\Phi_{11} = \frac{1}{4} R_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + m^\mu m^{*\nu}) = \frac{Q^2}{2\Sigma^2}. \quad (55)$$

Поскольку векторы l^μ и n^μ являются также главными изотропными направлениями для тензора электромагнитного поля (7), отлична от нуля лишь одна тетрадная проекция максвелловского тензора

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + m^{*\mu} m^\nu) = -\frac{1}{2} Q \rho^2. \quad (56)$$

Тензор Штеккеля — Киллинга (29) в терминах компонент векторов изотропной тетрады имеет простой вид

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} a^2 \cos^2 \theta + 2\Sigma m_{(\mu} m_{\nu)}^* = 2\Sigma l_{(\mu} n_{\nu)} - r^2 g_{\mu\nu} = \\ &= 2(a^2 \cos^2 \theta l_{(\mu} n_{\nu)} + r^2 m_{(\mu} m_{\nu)}^*) \end{aligned} \quad (57)$$

(совпадение различных представлений очевидно при учете (45). Наконец, антисимметричный тензор Яно — Киллинга можно получить интегрированием уравнений (31) в формализме Ньюмена — Пенроуза [47], что приводит к результату

$$f_{\mu\nu} = 2(a \cos \theta l_{[\mu} n_{\nu]} - i r m_{[\mu} m_{\nu]}^*). \quad (58)$$

Подставляя (58) в (32), получим (57). Нетрудно также убедиться в справедливости соотношения (30), учитывая, что максвелловский тензор поля Керра — Ньюмена в формализме Ньюмена — Пенроуза имеет вид

$$F_{\mu\nu} = 4 \operatorname{Re} \Phi_1 (n_{[\mu} l_{\nu]} + m_{[\mu} m_{\nu]}^*). \quad (59)$$

След от антисимметризованного произведения (58) и (59) обращается в нуль в согласии с (33).

На горизонте событий черной дыры тетрада Киннерсли сингулярна, причем особенность не устраняется и после перехода к координатам Эддингтона — Финкельштейна, как это видно из равенства

$$l_\mu dx^\mu = dt - dr \Sigma / \Delta - a \sin^2 \theta d\varphi = dv - (2\Sigma / \Delta) dr - a \sin^2 \theta d\Phi. \quad (60)$$

Можно, однако, сделать преобразование Лоренца (тетрадный поворот), не изменяющее векторов m^μ и $m^{*\mu}$, так, чтобы преобразованные векторы l'^μ и n'^μ ,

$$l'^\mu = \frac{\Delta}{2(r^2 + a^2)} l^\mu, \quad n'^\mu = \frac{2(r^2 + a^2)}{\Delta} n^\mu, \quad (61)$$

были бы несингулярны на горизонте будущего:

$$l'_\mu dx^\mu = \frac{1}{2(r^2 + a^2)} [\Delta (dv - a \sin^2 \theta d\varphi) - 2\Sigma dr];$$

$$n'_\mu dx^\mu = \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} (dv - a \sin^2 \theta d\varphi); \quad m'^\mu = m^\mu. \quad (62)$$

(тетрада Хартля — Хокинга [55]). Нормировка вектора l'^μ выбрана так, что $l'^\nu = 1$, нормировка n'^μ соответствует соглашению (41).

§ 2. «ЗАМАГНИЧЕННЫЕ» ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

Обсудим некоторые точные решения системы уравнений Эйнштейна — Максвелла, которые (хотя и с оговорками) можно истолковать как описывающие черные дыры в магнитной Вселенной Мелвина [56]. Эти решения не являются асимптотически плоскими; но имеют несингулярный горизонт событий; при устремлении к нулю напряженности магнитного поля B , направленного вдоль оси симметрии, они переходят в решения из семейства Керра — Ньюмена. Оценим напряженность магнитного поля, существенно влияющего на геометрию пространства-времени в окрестности шварцшильдовой черной дыры, приравнявая энергию поля в цилиндре радиуса r и высоты $r_+ = 2M$, равную $r^2 MB^2/4$, самой массе дыры M . Ясно, что магнитное поле напряженности B начинает существенно искажать метрику на расстоянии B^{-1} от сингулярности (в системе $G = c = 1$ B имеет размерность см^{-1}). Магнитное поле порядка

$$B_M = \frac{1}{M} \simeq 2,4 \cdot 10^{19} \frac{M_\odot}{M} \text{ (Гс)}, \quad (1)$$

где M_\odot — масса Солнца, будет существенно искажать метрику уже вблизи горизонта (в обычных единицах $B_M = c^4 M^{-1} G^{-3/2}$).

Симметрия $SU(2, 1)$ уравнений Эйнштейна — Максвелла для аксиально-симметричных полей

Идея использования симметрий уравнений Эйнштейна — Максвелла для получения новых точных решений на основе известных восходит к Элерсу [57], Харрисону [58] и Эрнсту [59] (см. также [60—62]). Для аксиально-симметричных полей система уравнений Эйнштейна — Максвелла может быть записана в виде двух нелинейных уравнений Эрнста [59] для комплексных потенциалов Φ и E (определения и вывод см. например, в [59, 224])

$$f \nabla^i \nabla_i E = (\nabla^i E + 2\Phi^* \nabla^i \Phi) \nabla_i E; \quad f \nabla^i \nabla_i \Phi = (\nabla^i E + 2\Phi^* \nabla^i \Phi) \nabla_i \Phi. \quad (2)$$

В результате параметризации $E = \frac{u^1 - u^3}{u^1 + u^3}$; $\Phi = \frac{u^2}{u^1 + u^3}$, где u^A , $A = 1, 2, 3$, — комплекснозначные функции, система (2) при некотором дополнительном условии приводится к форме [62]

$$u_B^* u^B \nabla^i \nabla_i u^A - 2u_B^* \nabla^i u^B \nabla_i u^A = 0, \quad (3)$$

где поднятие и опускание индексов A, B осуществляется с помощью метрики $\eta_{AB} = \text{diag}(1, 1, -1)$. Ясно, что унитарные преобразования в трехмерном комплексном пространстве с этой метрикой оставляют уравнения (3) инвариантными, при этом физически существенные преобразования образуют группу $SU(2, 1)$ (умножение u^A на фазовый множитель $e^{i\alpha}$ не изменяет потенциалов Эрнста). В формулах (2), (3) f — коэффициентная функция, а оператор ∇_i осуществляет ковариантное дифференцирование в двумерном пространственном сечении многообразия, метрика которого определяется линейным элементом в форме Папалетру [143]

$$ds^2 = f(d\varphi - \omega dt)^2 - f^{-1}(e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2). \quad (4)$$

Применяя к комплексным потенциалам Эрнста преобразование из группы $SU(2, 1)$, получим новые потенциалы, генерирующие точное решение системы уравнений Эйнштейна — Максвелла*). Эрнст [63] обратил внимание, что преобразование такого типа, задаваемое вещественным параметром B

$$E' = \Lambda^{-1}E; \Phi' = \Lambda^{-1} \left(\Phi - \frac{1}{2} BE \right); \Lambda = 1 + B\Phi - \frac{1}{4} B^2 E, \quad (5)$$

(указанное ранее Харрисоном [58]), будучи примененным к метрике плоского пространства-времени, приводит к метрике магнитной вселенной Мелвина [56]. Соответствующее преобразование метрики Шварцшильда дает решение, которое можно интерпретировать как описывающее Вселенную Мелвина, содержащую черную дыру; физические свойства его изучались в [64]. Известно также решение, описывающее заряженную вращающуюся черную дыру для частного значения заряда [65], а также для произвольного заряда, но медленного вращения [66], в общем случае вдали от черной дыры при этом оказывается отличным от нуля не только магнитное, но и электрическое поле.

Шварцшильдова черная дыра в магнитной Вселенной

Применяя преобразование (5) к потенциалу Эрнста пространства-времени Шварцшильда $E = -r^2 \sin^2 \theta$, приходим к новому решению с интервалом

$$ds^2 = \Lambda^2 \left(\frac{\Delta}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - r^2 d\theta^2 \right) - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda^2} d\varphi^2; \Lambda = 1 + \frac{1}{4} B^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (6)$$

где $\Delta = r(r - 2M)$, совпадающему со шварцшильдовым при $B \rightarrow 0$ и с интервалом Мелвина при $M \rightarrow 0$. Отсюда естественна интерпретация (6) как решения, описывающего невращающуюся

*) Полная группа симметрии уравнений Эйнштейна—Максвелла для стационарных осесимметричных конфигураций бесконечномерна, и в принципе все решения можно получать некоторым преобразованием из тривиального решения Минковского; о методах построения решений подробнее см. в [313, 314, 224].

черную дыру, погруженную в асимптотически однородное магнитное поле. Вектор-потенциал, задающий последнее, имеет вид

$$A_\mu dx^\mu = -\frac{Br^2 \sin^2 \theta}{2\Lambda} d\varphi. \quad (7)$$

Пространство-время не является асимптотически плоским. Характерной особенностью является различие пространственных сечений $\theta = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$. Длина окружности с центром в сингулярности, лежащей в плоскости $\varphi = \text{const}$, $2\pi r\Lambda$, растет при $r \rightarrow \infty$, в то время как длина окружности в плоскости $\theta = \pi/2$ есть $2\pi r \left(1 + \frac{1}{4} B^2 r^2\right)^{-1}$, эта величина стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$.

Горизонт событий, как видно из (6), по-прежнему лежит при $r = 2M$ и несингулярен, не изменяется и поверхностная гравитация κ (1.26), так как при $\theta = 0$ метрика совпадает со шварцшильдовой, а величина κ постоянна на горизонте. Подробнее свойства горизонта исследовались в [67]. Приведем отличные от нуля символы Кристоффеля для метрики (6)

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{r^4}{\Delta} \Gamma_{00}^1 = \frac{M}{\Delta} + \frac{2\delta}{r}; \quad \Gamma_{11}^1 = -\frac{M}{\Delta} + \frac{2\delta}{r}; \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{\Delta} \Gamma_{22}^1 = \frac{1+2\delta}{r};$$

$$r\Gamma_{13}^3 = \text{tg } \theta \Gamma_{23}^3 = (1-2\delta); \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{r \text{ctg } \theta}{\Delta} \Gamma_{33}^1 = \frac{\sin 2\theta}{2\Lambda^4} (2\delta-1), \quad (8)$$

где $\delta = 1 - \Lambda^{-1}$ и компоненты тензора электромагнитного поля

$$F_{13} = -Br\Lambda^{-2} \sin^2 \theta; \quad F_{23} = -Br^2\Lambda^{-2} \sin \theta \cos \theta. \quad (9)$$

Двумерное пространственное сечение геометрии Шварцшильда $\varphi = \text{const}$, $t = \text{const}$ можно представить как некоторую поверхность вращения в трехмерном пространстве, тогда проекции силовых линий на плоскость, ортогональную оси вращения, будут параллельными, в этом смысле можно говорить об однородности поля [68]. В случае $B \ll B_M$ существует область $Br \ll 1$, в которой пространство-время можно считать шварцшильдovým, в этой области $\Lambda \sim 1$ и потенциал (7) совпадает с решением уравнений Максвелла на шварцшильдovém фоне (подробнее см. § 9), описывающим асимптотически однородное магнитное поле. Отличный от нуля инвариант электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = B^2 \Lambda^{-4} \left(1 - \frac{2M \sin \theta}{r}\right) \quad (10)$$

имеет особенность в начале координат, исчезающую при $M \rightarrow 0$.

Для описания пространства-времени (6) в формализме Ньюмена — Пенроуза удобно ввести изотропный базис, обобщающий (1.40) — (1.44)

$$l^\mu = \frac{1}{\Lambda^2} \left(\frac{r^2}{\Lambda}, 1, 0, 0 \right); \quad n^\mu = \frac{1}{2} \left(1, -\frac{\Lambda}{r^2}, 0, 0 \right);$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2} r \Lambda} \left(0, 0, 1, \frac{i \Lambda^2}{\sin \theta} \right), \quad (11)$$

в котором проекции тензора Вейля равны [69]

$$\Psi_0 = 6(\Lambda - 1)(\Lambda - 2)r^{-2}\Lambda^{-6} = \sqrt{2}\Lambda^{-1} \operatorname{tg} \theta \Psi_1 = 4\Lambda^{-4}r^4\Lambda^{-2}\Psi_4;$$

$$\Psi_2 = (\Lambda - 2)r^{-2}\Lambda^{-4} \left[(\Lambda - 1)(2\operatorname{ctg}^2 \theta - 1) + \frac{M}{r}(3\Lambda - 2) \right];$$

$$\Psi_3 = -\frac{\Lambda^2}{2} \frac{\Delta}{r^2} \Psi_1 \quad (12)$$

и удовлетворяют тождеству $\Psi_0/\Psi_4 = (\Psi_1/\Psi_3)^2$. Благодаря последнему удается точно решить характеристическое уравнение, определяющее тип пространства по Петрову: — все четыре корня оказываются различными (тип I [69], при $M=0$ метрика становится вырожденной типа D).

Воспользовавшись формулой для гауссовой кривизны

$$K = 2\operatorname{Re}(\rho\mu - \lambda\sigma - \Psi_2 + \Phi_{11}) \quad (13)$$

(входящие сюда спинорные коэффициенты равны $\rho = -(r\Lambda^2)^{-1}$; $\mu = -\Delta/2r^3$; $\lambda = -\Delta\delta/\Lambda$; $\sigma = -2\delta/r\Lambda^2$ и $\Phi_{11} = \cos^2 \theta/2\Lambda^4$, получим выражение для гауссовой кривизны пространственного сечения горизонта событий

$$K_+ = \frac{1}{r_+^2 \Lambda_+^2} [1 - 2\delta(1 - 2(2 - 3\delta\Lambda_+^2) \operatorname{ctg}^2 \theta)], \quad (14)$$

где $\Lambda_+ \equiv \Lambda(r_+)$. На экваторе гауссова кривизна горизонта меньше, чем на полюсах, где она совпадает со шварцшильдовой величиной. При $\delta = 1/2$ кривизна на экваторе обращается в нуль и при $\delta > 1/2$ становится отрицательной, т. е. магнитное поле как бы вытягивает черную дыру вдоль силовых линий.

В классе решений типа «замагниченных» черных дыр метрика Шварцшильда — Эрнста является единственным статическим решением. Для вращающихся черных дыр в магнитном поле возникает индукционное электрическое поле, направленное радиально, и азимутальная составляющая вектора Пойнтинга становится отличной от нуля, что порождает недиагональную компоненту метрики $g_{0\varphi}$. Вектор Пойнтинга также будет отличен от нуля для невращающейся заряженной дыры во внешнем магнитном поле, соответствующее решение уравнений Эйнштейна уже не будет статическим [65, 70].

Вращающаяся черная дыра в сильном магнитном поле

Потенциалы Эрнста поля Керра — Ньюмена можно выбрать в виде [63, 70]

$$\Phi = -Q(a\rho^* \sin^2 \theta + i \cos \theta); \quad E = -\left(r^2 + a^2 - \frac{2M}{Q}\Phi - iaQ\rho^* \cos \theta\right) \sin^2 \theta - \\ - \Phi \left(4 \frac{aM}{Q} + iQ \cos \theta\right). \quad (15)$$

Преобразование Харрисона (5) дает новые потенциалы Φ' и E' «замагниченного» решения; при этом квадрат интервала приобретает вид

$$ds^2 = |\Lambda|^2 \Sigma \left(\frac{\Delta}{A} dt^2 - \frac{dr^2}{\Delta} - d\theta^2 \right) - \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma |\Lambda|^2} (d\varphi - \omega' dt)^2, \quad (16)$$

где $A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin \theta$, и функция ω' подчиняется уравнению [65]

$$D\omega' = |\Lambda|^2 D\omega + \sqrt{\Delta} \sin \theta (\Lambda^* D\Lambda - \Lambda D\Lambda^*) f^{-1}, \quad (17)$$

в котором символом D обозначен оператор $\sqrt{\Delta} \partial / \partial r + i \partial / \partial \theta$. Величина Λ в (16) комплексна, ее значения на положительной и отрицательной частях полярной оси комплексно сопряжены друг к другу

$$\Lambda_0 \equiv \Lambda(\theta=0) = \Lambda^*(\theta=\pi) = 1 + \frac{1}{4} B^2 Q^2 - iB(Q + aMB), \quad (18)$$

аналогичным свойством обладают потенциалы Эрнста

$$\Phi^*(\theta=\pi) = \Phi(0) \equiv \Phi_0 = -iQ; \quad E^*(\theta=\pi) = E(\theta=0) \equiv E_0 = i(4aM + iQ^2). \quad (19)$$

Вблизи полярной оси имеем следующее отношение компонент метрики $g_{\varphi\varphi}$ и $g_{\theta\theta}$:

$$g_{\varphi\varphi}/g_{\theta\theta} \approx \theta^2 |\Lambda_0|^{-4}, \quad (20)$$

что свидетельствует о возможной конической особенности (аналогично для $\theta \approx \pi$), если считать, что угол φ изменяется, как в «затравочном» решении, от 0 до 2π [70]. Избежать появления конических особенностей можно, ограничив изменение азимутального угла φ значениями $0 \leq \varphi \leq 2\pi/|\Lambda_0|^2$ либо вводя новую координату $\varphi' = \varphi/|\Lambda_0|^{-2}$, изменяющуюся на стандартном интервале $[0, 2\pi]$. Заметим, что описанный выше метод построения новых точных решений не фиксирует глобальной структуры многообразия, обеспечивая лишь локальное выполнение уравнений Эйнштейна — Максвелла.

Обсудим свойства электромагнитного поля, отвечающего преобразованному потенциалу Эрнста Φ' . Компоненты электрического и магнитного полей в локально лоренцевой системе отсчета, в которой $d\tilde{x}^0 \sim dt$, могут быть найдены по формулам [63]

$$B_{\hat{r}} + iE_{\hat{r}} = \frac{1}{\sqrt{A} \sin \theta} \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta}; \quad B_{\hat{\theta}} + iE_{\hat{\theta}} = -\sqrt{\frac{\Delta}{A}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi'}{\partial r}. \quad (21)$$

Подставляя значения Φ и E (15) в (5) и далее в (21) и сохраняя лишь линейные по напряженности магнитного поля B члены, на больших расстояниях от горизонта событий будем иметь

$$E_{\hat{r}} = \frac{Q + 2aMB}{r^2} + \frac{aMB}{r^2} (1 - 3 \cos^2 \theta); \quad B_{\hat{r}} = \left(B + \frac{2aQ}{r^3} \right) \cos \theta, \\ E_{\hat{\theta}} = \frac{Qa}{r^3} \left(\frac{QB}{2} - \frac{a}{r} \right) \sin 2\theta; \quad B_{\hat{\theta}} = \left(-B + \frac{aQ}{r^3} \right) \sin \theta. \quad (22)$$

В этом приближении магнитное поле является суперпозицией однородного поля и поля магнитного диполя, а электрическое поле содержит кулонову часть (первый член в $E_{\hat{r}}$) и фарадеевскую часть, обязанную электромагнитной индукции при вращении черной дыры в магнитном поле (интеграл по углам от второго слагаемого обращается в нуль). Заметим, что кулоновская часть соответствует не «затравочному» заряду Q , а заряду $Q + 2aMB$, этот результат верен с точностью до линейных членов по B . Физическое значение электрического заряда, отвечающего преобразованному решению, может быть найдено точно. Для этого вычислим полный поток электрического и магнитного полей через замкнутую поверхность, окружающую черную дыру, переходя к локальным координатам и воспользовавшись соотношениями (21). Это удобнее всего сделать для комплексной величины $Q - iP$, где Q — электрический, а P — магнитный заряды

$$Q' - iP' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi A^{1/2} (E_{\hat{r}} - iB_{\hat{r}}) \sin \theta d\theta = \\ = \frac{i|\Lambda_0|^2}{2} (\Phi'(0) - \Phi'(\pi)) = Q + 2aMB - \frac{1}{4} Q^3 B^2. \quad (23)$$

Таким образом, магнитный заряд преобразованного решения остается равным нулю, а электрический существенно отличается от затравочного значения: $Q' = Q + 2aMB - \frac{1}{4} Q^3 B^2$.

С помощью соотношений (21) нетрудно также вычислить точное значение компонент электрического поля на оси симметрии $E_{\hat{r}}(\theta=0)$ при $r \rightarrow \infty$:

$$E_{\hat{r}} \simeq B^2 |\Lambda_0|^{-4} \left[\frac{Q}{2} + (Q + 2aMB) \left(1 + \frac{3B^2 Q^2}{4} \right) + \frac{QB^4}{2} \left(M^2 a^2 - \left(\frac{Q}{2} \right)^4 \right) \right]. \quad (24)$$

Эта величина обращается в нуль лишь для шварцшильдовой дыры ($a=Q=0$); таким образом, поле, соответствующее преобразованному решению, уже не является чисто магнитным даже асимптотически.

Для полного определения метрики необходимо построить решение уравнения (17) для величины ω' , определяющей недиагональную компоненту метрики $g_{0\phi}$. Эта операция неоднозначна, так как в уравнения входят лишь производные от ω' и к любому решению можно добавить произвольную постоянную. В принципе доопределение параметров можно было бы осуществить, фиксируя значения массы и углового момента дыры в преобразованном решении, однако сами эти величины становятся неопределенными из-за асимптотически неплоского характера метрики. Характерно, что отличное от нуля значение ω' получается при равном нулю затравочном a [63]

$$\omega' = -\frac{2QB}{r} + QB^3 \left(r - \frac{\Delta}{2r} \sin^2 \theta + \frac{Q^2}{2r} \right) + \text{const.} \quad (25)$$

Таким образом, преобразованное решение содержит эргосферу, параметры которой зависят от напряженности магнитного поля. Это открывает любопытную возможность «управления» энергетикой черных дыр (включая квантовые процессы, подробнее см. § 19) с помощью внешнего магнитного поля. Анализируя поведение решения уравнения (17) в окрестности горизонта событий, можно показать, что функция ω' стремится на горизонте к постоянному (не зависящему от угла θ) значению (чего и следовало ожидать согласно теореме Картера о постоянстве угловой скорости вращения горизонта) и разложима в окрестности горизонта в степенной ряд. Далее нетрудно убедиться в отсутствии сингулярности на горизонте для преобразованного решения, переходя к координатам Эддингтона — Финкельштейна

$$dv = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr; \quad d\Phi = d\varphi - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \omega'_+ dr; \quad \omega'_+ \equiv \omega'(r_+), \quad (26)$$

в которых квадрат интервала (16) не имеет особенностей. Площадь поверхности горизонта событий вычисляется по формуле (1.20) с учетом изменения границы интегрирования по азимутальному углу

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi|\Lambda_0|^2} d\varphi \int_0^\pi V \sqrt{g_{22}g_{33}} d\theta d\varphi = 4\pi |\Lambda_0|^2 (r_+^2 + a^2). \quad (27)$$

Параметры M , a , так же как и Q (для которого это было продемонстрировано явно (23)) нельзя интерпретировать как физические значения массы и параметра вращения преобразованного решения, более того, значения массы и углового момента, определяемые с помощью двумерных поверхностных интегралов, содержащих поля Киллинга

$$M_\infty = -\frac{1}{8\pi} \oint_{r \rightarrow \infty} \xi_{(t)}^{\mu;\nu} d\Sigma_{\mu\nu}; \quad J_\infty = \frac{1}{16\pi} \oint_{r \rightarrow \infty} \xi_{(\phi)}^{\mu;\nu} d\Sigma_{\mu\nu}, \quad (28)$$

расходятся, если их вычислять по бесконечно удаленной поверхности. Значения M_H , J_H этих интегралов по поверхности горизонта конечны; разности $M_\infty - M_H$ и $J_\infty - J_H$ выражаются через объемные интегралы от соответствующих компонент тензора энергии-импульса [26]

$$M_\infty - M_H = \int (2T^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu T) \xi^\nu_{(t)} d\Sigma_\mu; \quad J_\infty - J_H = - \int T^\mu_\nu \xi^\nu_{(\varphi)} d\Sigma_\mu. \quad (29)$$

При $B=0$ эти величины конечны и выражают вклад электромагнитного поля Керра — Ньюмена в полную энергию и угловой момент конфигурации

$$M_\infty - M_H = \frac{Q^2}{2r_+} \left(1 + \frac{r_+^2 + a^2}{ar_+} f \right); \quad J_\infty - J_H = \frac{a}{4r_+} Q^2 \left[1 - \frac{r_+^2}{a^2} + f \left(\frac{a}{r_+} + \frac{2r_+}{a} + \frac{r_+^3}{a^3} \right) \right]; \quad f \equiv \arctg \frac{a}{r_+}. \quad (30)$$

При $B \neq 0$ соответствующие электромагнитные вклады расходятся.

§ 3. ОРБИТЫ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ

Интегралы движения в поле Керра — Ньюмена

Исследованию движения нейтральных и заряженных частиц в поле черных дыр посвящено много работ (см. обзоры [71, 72], а также [2, 21, 36]). Впервые на возможность полного разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби для заряженных частиц, движущихся в поле Керра — Ньюмена, было указано в работе Картера [24]. Помимо интегралов движения, ассоциируемых с векторами Киллинга, Картером был обнаружен еще один интеграл, выступавший в качестве константы разделения переменных. Впоследствии было выяснено [41—45], что существование этого интеграла связано с наличием нетривиального тензора Штеккеля — Киллинга (1.57) для метрики Керра — Ньюмена, согласованного с электромагнитным полем.

Доказать существование интегралов движения можно и не обращаясь к формализму Гамильтона — Якоби. Действительно, если

$$\mathcal{P}^\mu = \mu u^\mu + e A^\mu \quad (1)$$

обобщенный импульс частицы в электромагнитном поле с 4-потенциалом A^μ , то в силу уравнений движения

$$\mu u^\nu u_{\mu;\nu} = e F_{\mu\nu} u^\nu \quad (2)$$

производная от скалярного произведения $(\mathcal{P}_\mu \xi^\mu)$, где ξ^μ — вектор Киллинга,

$$\frac{d}{ds} (\xi^\mu \mathcal{P}_\mu) = (\xi^\mu_{;\lambda} \mathcal{P}_\mu + \xi^\mu \mathcal{P}_{\mu;\lambda}) u^\lambda = \mu \xi_{\mu;\nu} u^\mu u^\nu + e (\mathcal{L}_\xi A_\mu) u^\mu \quad (3)$$

обращается в нуль, если производная Ли от 4-потенциала вдоль векторного поля Киллинга равна нулю (первый член во второй строчке равен нулю в силу антисимметрии ковариантной производной $\xi_{\mu;\nu}$). Для поля Керра — Ньюмена $\mathcal{L}_\xi A_\mu = 0$, и, следовательно, существуют два интеграла движения — полная энергия

$$E = \xi^\mu_{(t)} \mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}_0 = \mu u_0 + e A_0 \quad (4)$$

и момент количества движения

$$L = \xi^\mu_{(\varphi)} \mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}_3 = \mu u_3 + e A_3. \quad (5)$$

Третий интеграл (Картера) имеет вид

$$K = \mu^2 a_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad (6)$$

где $a_{\mu\nu}$ — тензор Штеккеля — Киллинга (1.57). Производная от этой величины вдоль орбиты частицы

$$\frac{dK}{ds} = \mu^2 (a_{\mu\nu;\lambda} u^\mu u^\nu u^\lambda + 2a_{\mu\nu} u^\mu_{;\lambda} u^\nu u^\lambda) = \mu^2 (a_{(\mu\nu;\lambda)} u^\mu u^\nu u^\lambda + 2a_{\mu\nu} F^\mu_\lambda u^\nu u^\lambda) \quad (7)$$

обращается в нуль в силу равенства нулю $a_{(\mu\nu;\lambda)}$ (1.28) и соотношения (1.30), которое имеет место для электромагнитного 4-потенциала поля Керра — Ньюмена. Учитывая явный вид тензора $a_{\mu\nu}$ (1.29), (1.57), интеграл Картера можно представить следующими равнозначными формулами:

$$\begin{aligned} K &= \mu^2 (2|u_m|^2 + a^2 \cos^2 \theta) = m^2 (2u_l u_n - r^2) = \\ &= \mu^2 \left[\frac{\Delta}{\Sigma} \left(u^0 - a \sin^2 \theta u^3 + \frac{\Sigma}{\Delta} u^1 \right) \left(u^0 - a \sin^2 \theta u^3 - \frac{\Sigma}{\Delta} u^1 \right) - r^2 \right] = \\ &= \mu^2 [(a u^0 - (r^2 + a^2) u^3)^2 \sin^2 \theta + \Sigma^2 (u^2)^2 + a^2 \cos^2 \theta], \end{aligned} \quad (8)$$

где $u_l = u^\mu l_\mu$, $u_n = u^\mu n_\mu$, $u_m = u^\mu m_\mu$ — проекции 4-скорости на векторы изотропной тетрады.

Ниже рассмотрены частные классы орбит нейтральных и заряженных частиц около черных дыр, которые использованы для приложений. Более полную информацию можно найти в [2].

Экваториальные геодезические в пространстве-времени Керра

Выражая компоненты 4-скорости через интегралы движения (4), (5) и (8) (при $A^\mu = 0$) и учитывая равенство $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1$, получаем систему первых интегралов уравнений движения

$$\Delta \mu \frac{dt}{ds} = E((r^2 + a^2) + \frac{2Mr a^2}{\Sigma} \sin^2 \theta) - \frac{2Mr a}{\Sigma} L,$$

$$\Delta\mu \frac{d\varphi}{ds} = \frac{2Mr a}{\Sigma} E + \frac{L}{\sin^2 \theta} \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right),$$

$$\Sigma^2 \mu^2 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = [(r^2 + a^2) E - aL]^2 - \Delta (K + \mu^2 r^2), \quad (9)$$

$$\Sigma^2 \mu^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = (K - \mu^2 a^2 \cos^2 \theta) - \left(aE \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right)^2.$$

Эти уравнения допускают возможность движения в одной плоскости, лишь если эта плоскость экваториальная, что ясно уже из соображений симметрии. В этом случае, полагая $\theta = \pi/2$ и выразив K через E и L из условия $d\theta/ds = 0$

$$K = (aE - L)^2, \quad (10)$$

получим систему из трех уравнений

$$\Delta\mu \cdot dt/ds = E(r^2 + a^2 + 2Ma^2/r),$$

$$\Delta\mu \frac{d\varphi}{ds} = \frac{2Ma}{r} E + L \left(1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (11)$$

$$r^4 \mu^2 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = [(r^2 + a^2) E - aL]^2 - \Delta [(aE - L)^2 + \mu^2 r^2] \equiv f(r).$$

Для отыскания параметров круговых орбит нужно решить систему уравнений

$$f(r) = 0, \quad \frac{df}{dr} = 0, \quad (12)$$

откуда находим следующие выражения для энергии E и углового момента L через радиус орбиты r [73]:

$$\frac{E_{\pm}}{\mu} \equiv \gamma_{\pm} = \frac{r - 2M \pm a(M/r)^{1/2}}{(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}}, \quad (13)$$

$$\frac{L_{\pm}}{\mu} = \pm \sqrt{\frac{M}{r}} \frac{r^2 \mp 2a\sqrt{Mr} + a^2}{(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}}. \quad (14)$$

Здесь верхний знак соответствует движению частицы по направлению вращения черной дыры (прямые орбиты), а нижний — в противоположном направлении (обратные орбиты). Знаменатель в выражениях (13) и (14) обращается в нуль при $r \rightarrow r_{\gamma}$, где r_{γ} — радиус круговой изотропной геодезической (круговой фотонной орбиты)

$$r_{\gamma}^2 - 3Mr_{\gamma} \pm 2a\sqrt{Mr_{\gamma}} = 0, \quad (15)$$

откуда следует

$$r_{\gamma}^{\pm} = 2M \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos(\mp a/M) \right] \right\}. \quad (16)$$

Движение массивных частиц по круговым орбитам с радиусом, близким к r_1 , является ультрарелятивистским; полагая $r = r_1(1 + \alpha)$, $\alpha \ll 1$, из (13) и (16) найдем

$$\gamma^2 = \frac{r_\gamma - M}{6\alpha r_\gamma}; \quad r = r_\gamma \left(1 + \frac{r_\gamma - M}{6r_\gamma} \frac{1}{\gamma^2} \right). \quad (17)$$

Заметим, что в поле Шварцшильда ($a=0$) радиус круговой фотонной орбиты

$$r_1 = 3M.$$

Подстановка (13) и (14) во второе уравнение системы (11) дает угловую скорость кругового движения частицы в экваториальной плоскости пространства Керра

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv \omega_K = \pm \frac{\omega_S}{1 \pm a\omega_S}, \quad (18)$$

где ω_S — соответствующая угловая скорость в поле Шварцшильда

$$\omega_S^2 = M/r^3. \quad (19)$$

Вопрос об устойчивости движения по круговым орбитам будет рассмотрен ниже при исследовании малых колебаний около круговых орбит. Заметим только, что в поле Керра не все круговые орбиты являются связанными (т. е. имеют $E < \mu$); как видно из (13), возможны круговые геодезические и при $\gamma > 1$ (они все оказываются неустойчивыми).

Для описания инфинитного движения удобнее использовать в качестве переменной обратный радиус $u = 1/r$. Из второй пары уравнений (11) находим тогда уравнение для траектории в виде

$$\frac{d\varphi}{du} = \pm \frac{2MaEu + L(1 - 2Mu)}{(1 - 2Mu + a^2u^2)[F(u)]^{1/2}}, \quad (20)$$

где $F(u)$ — полином третьей степени

$$\begin{aligned} F(u) &= 2M(aE - L)^2 u^3 + [a^2(E^2 - \mu^2) - L^2]u + 2\mu^2 Mu + E^2 - \mu^2 \equiv \\ &\equiv 2M(aE - L)^2 (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3). \end{aligned} \quad (21)$$

В зависимости от положения корней u_1, u_2, u_3 движение имеет различный характер. Если все корни действительны, причем $u_3 \leq 0 < u_2 < u_1$, происходит рассеяние, т. е. частица, пролетев мимо черной дыры и сделав, возможно, один или несколько оборотов вокруг нее, уходит на бесконечность. Захват частицы черной дырой отвечает комплексным значениям корней u_1 и u_2 . Случай $u_1 = u_2$ (все корни действительны) является критическим. При этом траектория частицы асимптотически навивается на окружность

радиуса $r_0 = (u_1)^{-1}$, совершая бесконечное число оборотов вокруг черной дыры. В этом последнем случае

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = [Q + (Q^2 - 12M^2K)^{1/2}] / 6MK, \\ u_3 &= [Q - 2(Q^2 - 12M^2K)^{1/2}] / 6MK, \end{aligned} \quad (22)$$

где K определяется формулой (10) и $Q = L^2 - a^2(E^2 - \mu^2)$, причем

$$E^2 - \mu^2 = -2u_3 u_1^2 M (aE - L)^2. \quad (23)$$

Уравнение (23) — алгебраическое уравнение шестой степени относительно момента количества движения, аналитически его решение можно найти в случае нерелятивистских частиц ($E \sim \mu$)

$$L_{cr} = L_{\pm} \equiv \pm 2\mu M (1 + \sqrt{1 \mp a/M}) \quad (24)$$

и ультрарелятивистских ($E \gg \mu$)

$$u_1 = u_2 = \frac{1}{r_{\gamma}}; \quad u_3 = -\frac{1}{2r_{\gamma}}; \quad L = aE \frac{r_{\gamma} + 3M}{3M - r_{\gamma}}. \quad (25)$$

Для случая метрики Шварцшильда будем иметь

$$L = 4\sqrt{2}\mu^3 M [E(9E^2 - 8\mu^2)^{3/2} - 27E^4 + 36\mu^2 E^2 - 8\mu^4]^{-1/2}.$$

Интегрируя уравнение траектории (20) при $L \sim L_{cr}$, находим

$$\varphi = \frac{1}{a^2 E} (Q_+ \ln v_+ - Q_- \ln v_- - Q_1 \ln v_1), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} Q_p &= \frac{2M(aE - L)u_p + L}{\sqrt{u_1 - u_3}(u_p - u_1)(u_p - u_-)}; \quad v_p = \frac{\sqrt{u_p - u_3} + \sqrt{u - u_3}}{\sqrt{u_p - u_3} - \sqrt{u - u_3}}; \\ u_{\pm} &= \frac{1}{r_{\pm}}; \quad p = 1, \pm. \end{aligned} \quad (27)$$

Из этой формулы следует, что ультрарелятивистская частица, приходящая из бесконечности с моментом, близким к критическому, будет навиваться на круговую изотропную геодезическую.

Движение нейтральных частиц в пространстве Эрнста — Шварцшильда

Для исследования геодезических линий в пространстве-времени (2.6) воспользуемся уравнением Гамильтона — Якоби

$$\frac{r^2}{\Delta \Lambda^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{\Delta}{r^2 \Lambda^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2 \Lambda^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{\Lambda^2}{r^2 \sin^2 \theta} = \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = \mu^2, \quad (29)$$

решение которого в силу аксиальной симметрии и стационарности поля представимо в виде

$$S = -Et + L\varphi + S_1(r, \theta), \quad (30)$$

однако переменные в уравнении для S_1 в общем случае не разделяются. Тем не менее из соображений симметрии ясно, что возможно чисто радиальное движение вдоль полярной оси, а также плоское движение при $\theta = \pi/2$. Для траекторий в плоскости $\theta = \pi/2$ из (29) получим

$$S_1(r) = \int \frac{\Lambda r}{\sqrt{\Delta}} (r^2 E^2 / \Delta \Lambda^2 - \mu^2 - (\Lambda L)^2 / r^2)^{1/2} dr. \quad (31)$$

Соответствующие первые интегралы уравнений движения таковы:

$$\mu \Lambda^2 \frac{dt}{ds} = \frac{Er^2}{\Delta}; \quad \mu \Lambda^{-2} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{L}{r^2}; \quad \mu \Lambda^2 \frac{dr}{ds} = \pm (E^2 - U_{\text{eff}}^2)^{1/2}, \quad (32)$$

где

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{\Delta \Lambda^2}{r^2} \mu^2 \left(1 + \frac{L^2 \Lambda^2}{\mu^2 r^2} \right); \quad \Lambda \equiv \Lambda \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right). \quad (33)$$

В отличие от случая шварцшильдовой метрики эффективная потенциальная энергия радиального движения (33) неограниченно возрастает при $r \rightarrow \infty$, причем эта особенность сохраняется и для безмассовых частиц, если только $L \neq 0$. Отсюда следует, что уход массивных частиц на бесконечность в плоскости $\theta = \pi/2$ вообще невозможен, а в случае $\mu = 0$ возможен лишь при чисто радиальном движении $L = 0$.

Для безмассовых частиц введем прицельный параметр $\rho = L/E$ и, разделив друг на друга первые два из уравнений (3.32), получим

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\Delta}{r^2} \left(1 + \frac{\Delta \Lambda^4 \rho^2}{r^4} \right)^{1/2}. \quad (34)$$

Равенство нулю подкоренного выражения определяет точки поворота. Помимо значения r_{t_1} координаты точки поворота, переходящего в соответствующее шварцшильдово значение при $B \rightarrow 0$, существует еще одна точка поворота, координата которой при $r \gg M$, $B\rho \ll 1$ равна

$$r_{t_2} = 2^{4/3} / (B^{4/3} \rho^{1/3}). \quad (35)$$

Эта точка отвечает отражению частицы от «бесконечности» при $\rho \neq 0$.

Продифференцировав выражение (34) по параметру r , в результате совместного решения уравнений $U_{\text{eff}} = \partial U_{\text{eff}} / \partial r = 0$ получим условие для определения радиусов замкнутых круговых изотропных геодезических

$$r - 3M = \frac{1}{4} B^2 r^2 (3r - 5M). \quad (36)$$

Уравнение (36) при $B = 0$ имеет один корень $r = 3M$, а при достаточно больших B корней в физической области вообще нет, так

как правая часть (36) слишком быстро растет. Для нахождения «критического» значения напряженности магнитного поля B_{cr} , при котором имеется одна замкнутая светогеодезическая, учтем, что в этом предельном случае кривая, соответствующая правой части (36), касается прямой $r=3M$ в некоторой точке r_0 и, следовательно, значение производной от правой части (36) в этой точке равно значению производной левой части, т. е. единице. Совместно с уравнением (36) это условие дает

$$r_0 = \frac{1}{3} M (8 + \sqrt{19}), \quad (37)$$

а соответствующее значение B_{cr} равно

$$B_{cr} = 2 \cdot 3^{1/2} B_M (169 + 38\sqrt{19})^{-1/2}. \quad (38)$$

При $B > B_{cr}$ круговых светогеодезических нет, при $B = B_{cr}$ имеется одна круговая изотропная геодезическая, при $B < B_{cr}$ существуют две такие светогеодезические с радиусами r_1 и r_2 , для которых, с учетом малости отношения B_{cr}/B_M можно получить следующие приближенные выражения:

$$r_1 \simeq 3M + 9 \left(\frac{B}{B_M} \right)^2, \quad r_2 \simeq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{B}. \quad (39)$$

Отметим, что при $B \rightarrow 0$, r_1 переходит в шварцшильдово значение $r_1 = 3M$, а $r_2 \rightarrow \infty$.

Для массивных частиц при $B < B_{cr}$ в области $r_1 < r < r_2$ существуют круговые орбиты, параметры которых определяются из условий $U_{eff} = E$, $\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} = 0$:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{E}{\mu} = \frac{\sqrt{\Delta\Lambda}}{r} \left[(r-2M) \left(1 + \frac{2}{\Lambda} \right) \right]^{1/2} \times \\ &\times \left[r - 3M - 4(r-2M) \left(1 - \frac{1}{\Lambda} \right) \right]^{-1/2}, \\ \frac{L}{\mu M} &= \pm \frac{1}{\Lambda} \left[1 + 2 \left(\frac{r}{M} - 2 \right) \left(1 - \frac{1}{\Lambda} \right) \right]^{1/2} \times \\ &\times \left[1 - \frac{3M}{r} - 4 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 - \frac{1}{\Lambda} \right) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (40)$$

По мере приближения к светогеодезическим (39) эти орбиты становятся ультрарелятивистскими, причем

$$\lim_{r \rightarrow r_1} \gamma(r) = \frac{1}{3} \frac{M}{r - r_1}; \quad \lim_{r \rightarrow r_2} \gamma(r) = \frac{2\sqrt{2}}{3^{5/4}} \left(\frac{M}{r - r_2} \right)^{1/2}. \quad (41)$$

Отметим, что фактор Λ в области существования круговых орбит, как следует из (38), (39), заключен в пределах $1 \leq \Lambda \leq 4/3$.

Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле около черных дыр

Для описания движения заряженных частиц в поле (2.6), (2.7) в уравнениях (29), (31), (32) и (33) следует сделать замену $L \rightarrow L + \frac{eBr^2}{2\Lambda} \sin^2 \theta$, где e — заряд частицы, причем параметр

L теперь играет роль обобщенного импульса, соответствующего азимутальной координате. Правое и левое вращения в экваториальной плоскости становятся неэквивалентными из-за различного направления силы Лоренца. По этой же причине радиальное движение при фиксированном значении L различно для частиц разного знака заряда. При значениях L , удовлетворяющих неравенству

$$L < |e|BM^2 = |e|MB/B_M, \quad (42)$$

эффективный потенциал радиального движения монотонно возрастает с увеличением r при любом знаке заряда. При достаточно больших по сравнению с правой частью (42) значениях L , U_{eff} имеет минимум, расположенный при $LB_M \gg |e|MB$ в точке

$$r_m = \left(\frac{2LB_M M}{|e|B} \right)^{1/2}, \quad (43)$$

причем кривая, соответствующая знаку заряда, при котором сила Лоренца направлена от дыры, проходит всюду ниже кривой, отвечающей противоположному знаку заряда (рис. 2). Мы приходим к выводу, что радиальный потенциальный барьер для частиц одного знака заряда под действием магнитного поля опускается, а для частиц противоположного знака поднимается, что делает возможным радиальное прохождение частиц в первом случае при энергии, меньшей соответствующего шварцшильдова значения.

Параметры круговых траекторий заряженных частиц в плоскости $\theta = \pi/2$ также зависят от знака заряда. Энергия и обобщенный момент для круговых орбит зависят от их радиуса следующим образом:

$$L = \frac{\mu r}{\Lambda} \left(\lambda - \frac{eBr}{2\mu} \right), \quad E = \mu\gamma = \mu \frac{\Lambda^{1/2}}{r} \Lambda (1 + \lambda^2)^{1/2},$$

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_{(\pm)} = & -\frac{1}{2} \left\{ \eta \pm \left[\eta^2 + 4 \left(1 + 2 \left(\frac{r}{M} - 2 \right) \left(1 - \frac{1}{\Lambda} \right) \right) \right] \right\} \times \\ & \times \left(\frac{r}{M} - 3 - 4 \left(\frac{r}{M} - 2 \right) \left(1 - \frac{1}{\Lambda} \right) \right)^{1/2} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{r}{M} - 3 - 4 \left(\frac{r}{M} - 2 \right) \left(1 - \frac{1}{\Lambda} \right) \right]^{-1},$$

$$\eta = \frac{e}{\mu} \frac{B}{B_M} \frac{\Delta}{M^2 \Lambda}, \quad (44)$$

причем условием существования круговых орбит является неотрицательность подкоренного выражения.

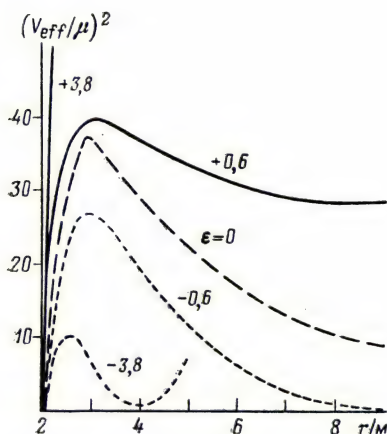


Рис. 2. Эффективный потенциал радиального движения заряженной частицы в магнитном поле вокруг шварцшильдовой черной дыры при различных ε . Кривые построены для случая $L=30M\mu$

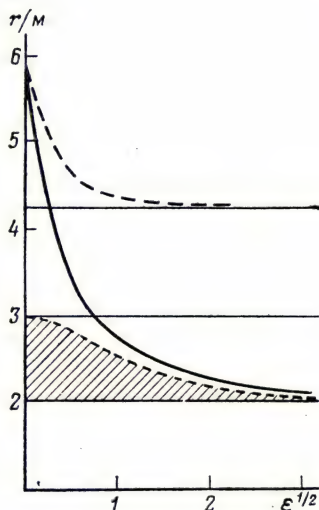


Рис. 3. Области существования и устойчивости круговых орбит заряженных частиц в зависимости от напряженности магнитного поля вокруг черной дыры. Заштрихована область параметров, при которых не существуют круговые орбиты. Сплошная кривая ограничивает область радиальной устойчивости антиларморовых орбит, пунктирная — ларморовых

Заметим, что если в случае нейтральных частиц влияние магнитного поля определялось отношением B/B_M , то в случае заряженных частиц определяющую роль играет фактор $\varepsilon = eB/\mu B_M$, связанный с силой Лоренца. Даже при очень малом значении отношения B/B_M для частиц с большим отношением e/μ (для элект-

рона $e/\mu \sim 10^{21}$) параметр $\varepsilon = eB/\mu B_M$ может быть не малым. В дальнейшем будем пренебрегать «геометрическим» воздействием магнитного поля на заряженные частицы, полагая $\Lambda = 1$. В этом случае вместо (3.44) будем иметь

$$\lambda_{(\pm)} = -\frac{\Delta}{2M(r-3M)} \left(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4 \frac{(r-3M)M^3}{\Delta^2}} \right). \quad (45)$$

Нетрудно видеть, что величина $\lambda_{(+)}$ имеет особенность при $r = 3M$, в то время как $\lambda_{(-)}$ такой особенности не имеет. Область существования круговых траекторий, задаваемая условием положительности подкоренного выражения в (3.45), простирается при достаточно больших значениях отношения $eB/\mu B_M$ вплоть до горизонта (рис. 3).

Покажем, что при $r > 3M$ возможно вращение в обе стороны, а в области $2M < r \leq 3M$ возможно только такое вращение, при котором сила Лоренца направлена от дыры. Запишем радиальное уравнение движения

$$\frac{r^2}{\Delta} \frac{d^2 r}{dt^2} - 3 \frac{Mr^2}{\Delta^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = -\frac{M}{r^2} + \omega_0^2 r + \omega_B \omega_0 r, \quad (46)$$

$$\omega_0 = d\varphi/dt,$$

где $\omega_B = eB/(\mu u^0)$ — циклотронная частота в гравитационном поле, $u^0 = dt/ds = \gamma r^2/\Delta$. Первое слагаемое в правой части (46) представляет силу гравитационного притяжения, второе — центробежную силу, третье — силу Лоренца. Обозначив частоту кругового движения в поле Шварцшильда через $\omega_S = (M/r^3)^{1/2}$, для круговых орбит $\left(\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dr}{dt} = 0 \right)$, найдем

$$\omega_0 = \Omega_{(L)} = \frac{1}{2} \omega_B \left(\pm \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_S^2}{\omega_B^2}} - 1 \right). \quad (47)$$

Нижний знак в (47) соответствует силе Лоренца, направленной на дыру («ларморово» вращение), верхний знак отвечает силе Лоренца, направленной от дыры («антиларморово» вращение). При $\omega_B \rightarrow 0$ частоты (47) стремятся к $\pm \omega_S$, а при $\omega_S \ll \omega_B$ найдем, что $\Omega_A \simeq \omega_S^2/\omega_B$, $\Omega_L \simeq -\omega_B$. Из условия равенства единице квадрата четырех-скорости получим

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1 = (u^0)^2 \left(1 - \frac{3M}{r} + r^2 \omega_B \omega_0 \right). \quad (48)$$

Из этой формулы видно, что ларморово движение возможно только в области $r > 3M$, в то время как антиларморово движение возможно как в области $r > 3M$, так и в области $2M < r \leq 3M$. Сопоставляя формулы (43), (45), (47), нетрудно прийти к выводу, что

при $r > 3M$ ларморово вращение соответствует значению $\lambda_{(+)}$ выражения (45), а антиларморово — значению $\lambda_{(-)}$. Угловая скорость (47) после подстановки соответствующих значений энергии может быть также записана в виде

$$\Omega_{(L)}^{(A)} = \pm \frac{\Delta^{1/2}}{r^2} \lambda_{(\mp)} (1 + \lambda_{(\mp)}^2)^{-1/2}. \quad (49)$$

Для случая антиларморова вращения точка $r = 3M$ не представляет особенности, для ларморова же вращения $\gamma_{(+)}(r \rightarrow 3M) \rightarrow \infty$, как и в случае геодезического движения. При достаточном удалении от точки $r = 3M$, именно при

$$\varepsilon \Delta / M^2 \ll 2 \left(\frac{r}{M} - 3 \right)^{1/2}, \quad (50)$$

разность энергий, соответствующих двум вращениям в противоположном направлении при заданном радиусе, выражается формулой

$$E_L - E_A = \mu (\gamma_{(+)} - \gamma_{(-)}) = \mu \frac{r - 2M}{r - 3M} \varepsilon \sqrt{\frac{r}{M}};$$

при положительном значении заряда энергия, соответствующая ларморову вращению, больше. При еще больших значениях радиуса сила Лоренца становится доминирующей, и мы получим

$$E_L \simeq \mu \sqrt{1 + (eBr/\mu)^2}; \quad L_L \simeq -3eBr^2/2, \quad (51)$$

откуда для ларморовых орбит получается обычное значение циклотронного радиуса. Таким образом ларморово вращение можно рассматривать как искаженное гравитационным полем циклотронное вращение, антиларморово же вращение возможно только в комбинированном поле черной дыры и магнитном.

Антиларморову вращению в области $2M < r \leq 3M$ отвечают оба знака перед корнем в (45). При $\varepsilon \gg 1$ существуют круговые траектории, радиусы которых близки к радиусу горизонта

$$r \gtrsim M(2 + \varepsilon^{-1}). \quad (52)$$

По мере приближения к горизонту энергия $\mu\gamma_{(\pm)}$ антиларморовых траекторий стремится к нулю, что связано с гравитационным дефектом массы. Энергия, измеренная в локально-лоренцевой системе отсчета на границе, определяемой знаком равенства в (52), равна конечной величине $\tilde{E} = \sqrt{2}\mu$. Этому значению отвечает гравитационный дефект массы

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\mu - E}{\mu} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right), \quad (53)$$

который может быть сколь угодно близким к 100%.

Зависимость энергий ларморовых и антиларморовых траекторий при некоторых значениях параметра ε показана на рис. 4. Отметим, что при $r > 3M$ существуют ларморовы траектории, характеризующиеся сколь угодно большим значением γ , причем ультрарелятивистский характер движения не связан с близостью к замкнутой светогеодезической $r = 3M$. В частности, при выполнении условия (50)

$$\gamma_{(+)}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 + \frac{\varepsilon^2 \Delta^2}{M^2 (r - 3M)^2}\right] \gg 1. \quad (54)$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости описанных выше круговых орбит заряженных частиц в экваториальной плоскости. Для устойчивости в радиальном направлении необходимо, чтобы $\frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial r^2} > 0$.

Результирующее условие может быть представлено в двух эквивалентных формах

$$\varepsilon^2 > \frac{\gamma^2 (6M/r - 1)}{(r/M - 2)^3}, \quad \frac{\omega_B^2}{\omega_S^2} > \frac{6M - r}{r - 2M}. \quad (55)$$

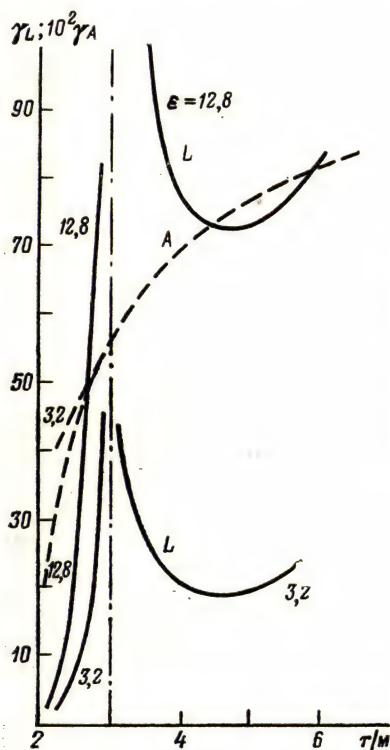


Рис. 4. Кривые отношения энергии к массе $\gamma = E/\mu$ для круговых орбит при ларморовом (сплошные линии) и антиларморовом (пунктирные линии) вращениях

Отсюда ясно, что при $r > 6M$ движение устойчиво по радиусу независимо от величины магнитного поля и направления вращения, как это имеет место при $B = 0$. При $r < 6M$ области устойчивости в радиальном направлении для ларморова и антиларморова вращений различны, поскольку при заданных r и ε значения энергий, которые необходимо подставить в (55), не совпадают. При достаточно больших $\varepsilon = eB/\mu B_M$ вращение, соответствующее значению энергии $\gamma_{(+)}$, устойчиво вплоть до $r \simeq 4.3M$, вращение с энергиями $\gamma_{(-)}$ устойчиво вплоть до горизонта. В частности, существует устойчивая антиларморова орбита, для которой дефект массы задается формулой (53).

Для исследования устойчивости в вертикальном направлении в уравнении Гамильтона — Якоби произведем разложение по углу $\alpha = \pi/2 - \theta$ вблизи плоскости $\theta = \pi/2$:

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{\Delta} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} (1 + \alpha^2) + \frac{1}{4} e^2 B^2 r^2 (1 - \alpha^2) + \mu^2 + \\ + eBL + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{\Delta}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Собрав члены, пропорциональные α^2 , приведем соответствующий вклад к виду

$$\frac{\alpha^2}{r^2} \left(L^2 - \frac{e^2 B^2 r^4}{4} \right) = \frac{\alpha^2 r^6}{E^2 \Delta^2} \omega_0 (\omega_0 + \omega_B). \quad (57)$$

Принимая во внимание выражение (47) для частот, нетрудно убедиться в том, что величина в квадратных скобках равна ω_S^2 и, таким образом, является положительной независимо от энергии и направления вращения. Это означает, что движение в приближении малых колебаний вертикально устойчиво при всех допустимых r .

В случае вращающейся черной дыры, погруженной в (слабое) однородное магнитное поле, круговые орбиты заряженных частиц в экваториальной плоскости также удастся исследовать аналитически. Отличные от нуля компоненты максвелловского тензора пробного однородного магнитного поля можно получить из (2.45), полагая $Q_0 = -2aMB$ (см. также [75]). Переходя к координатам Бойера — Линдквиста, будем иметь

$$\begin{aligned} F_{01} = -\frac{aMB}{\Sigma} \left(1 - \frac{2r^2}{\Sigma} \right) (1 + \cos^2 \theta); \quad F_{02} = aB \frac{Mr}{\Sigma^2} (a^2 - r^2) \sin 2\theta; \\ F_{32} = B \sin 2\theta \left\{ \frac{r^2 + a^2}{2} - \frac{2Mr a^2}{\Sigma} \left[\cos^2 \theta + \frac{a^2}{2\Sigma} \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) \right] \right\}; \\ F_{31} = B \sin^2 \theta \left[r - \frac{Ma^2}{\Sigma} \left(1 - \frac{2r^2}{\Sigma} \right) (1 + \cos^2 \theta) \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

Для описания орбит заряженных частиц в этом случае удобнее воспользоваться непосредственно уравнениями движения

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda = \frac{e}{\mu} F_{\nu\lambda}^\mu u^\nu. \quad (59)$$

Принимая во внимание отмеченные в § 1 свойства симметрии символов Кристоффеля для метрики Керра и компонент тензора поля (58), нетрудно прийти к выводу, что в плоскости $\theta = \pi/2$ возможно круговое движение. При этом уравнения (59) с $\mu = 0, 2, 3$ удовлетворяются тривиально, а уравнение с $\mu = 1$ приводит к следующему выражению для угловой скорости вращения:

$$\omega_0 = \frac{\omega_1}{1 - a^2 \omega_S^2} \left\{ \pm \left[1 + \left(\frac{\omega_S}{\omega_1} \right)^2 (1 + a \omega_B) (1 - a^2 \omega_S^2) \right]^{1/2} - 1 \right\}, \quad (60)$$

где циклотронная частота определена по-прежнему как $\omega_B = eB/\mu u^0$ и величина ω_1 равна

$$\omega_1 = \frac{\omega_B}{2} (1 + a^2 \omega_S^2) + a \omega_S^2. \quad (61)$$

Два знака в (60) соответствуют прямому и обратному вращению по отношению к направлению вращения черной дыры. Для медленно вращающейся дыры $a \ll M$ в случае, когда сила Лоренца является доминирующей, из (60) найдем

$$\omega_0 \approx \begin{cases} \omega_S^2/\omega_B + a \omega_S^2, \\ -\omega_B (1 + \omega_S^2/\omega_B^2 + 3a \omega_S^2/\omega_B). \end{cases} \quad (62)$$

Положительный знак ω_0 отвечает антиларморову вращению, при $M \rightarrow 0$, как видно из (62), оно становится невозможным. Нижняя строчка в (62) соответствует ларморову вращению, переходящему в обычное циклотронное вращение при $M \rightarrow 0$.

Покажем возможность негеодезического движения заряженных частиц по ультрарелятивистским круговым орбитам, удаленным от круговой изотропной геодезической. Для этого выразим энергию частицы $E = \mu u_0$ через частоты ω_B и ω_0 :

$$E \equiv \mu \gamma = \frac{\mu}{M} \varepsilon \left[1 - \frac{2M}{r_0} (1 - a \omega_0) \right] \frac{\omega_0 (1 + a^2 \omega_S^2) - a \omega_S^2}{\omega_S^2 (1 - a \omega_S^2) - \omega_0^2}. \quad (63)$$

Из условия $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1$ имеем

$$\omega_0^2 (g_{33} - g_{03}^2 \gamma^{-2}) + 2 \omega_0 (g_{03} - g_{00} g_{33} \gamma^{-2}) + g_{00} (1 - \gamma^{-2}) = 0, \quad (64)$$

откуда при $\gamma \gg 1$

$$\omega_0 = \Omega_0 \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2\gamma^2} \Omega_0^2; \quad \Omega_0 = \frac{2Ma \mp \sqrt{\Delta} r_0}{r_0^3 + a^2 r_0 + 2Ma^2}. \quad (65)$$

Подставляя (65) в (63), нетрудно видеть, что $\gamma \gg 1$ либо в случае, когда знаменатель (63) стремится к нулю при $\omega_0 = \Omega_0$, что соответствует фотонной орбите (16), либо в случае $\varepsilon \gg 1$, т. е. когда сила Лоренца является основной (ларморово вращение). Таким образом, хотя при $a \neq 0$ уже не удастся выразить энергию как функцию радиуса орбиты в явной форме, из этих рассуждений следует, что вращение дыры не изменяет качественно характера ультрарелятивистских орбит заряженных частиц по сравнению со шварцшильдовым случаем.

Малые колебания около круговых орбит

Перейдем теперь к описанию орбит, близких к рассмотренным выше круговым орбитам. Одновременно решение этой задачи дает ответ на вопрос об устойчивости круговых орбит. Рассмотрим малые возмущения

$$\xi^\mu(s) = x^\mu(s) - z^\mu(s) \quad (66)$$

около круговых орбит $z^\mu(s) = u^0(s, 0, 0, \omega_0 s)$. Проводя в уравнениях движения (59) разложение по ξ^μ , перенося нелинейные члены в правую часть и переходя от параметра s к $t = u^0 s$, имеем

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{dt^2} + \gamma_\alpha^\mu \frac{d \xi^\alpha}{dt} + \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} U^\mu = N^\mu(\xi), \quad (67)$$

$$a = 1, 2; \quad x^a = (r, \theta),$$

где учтено, что координаты t и ϕ циклические. В этой формуле

$$\gamma_\alpha^\mu = \left(2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\beta - \frac{e}{\mu} F_\alpha^\mu \right) (u^0)^{-1} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \quad (68)$$

$$\frac{\partial U^\mu}{\partial x^a} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^a} \left(\gamma_\alpha^\mu u^\alpha (u^0)^{-1} - \frac{e}{\mu} F_\alpha^\mu u^\alpha (u^0)^{-2} \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}, r=r_0},$$

причем подстановка $\theta = \pi/2$, $r = r_0$ в (68) должна проводиться после вычисления производных от величины, стоящей в скобках (индекс нуль у величины r_0 далее опускается). Символом N^μ в правой части (67) обозначены все нелинейные по ξ^μ члены, входящие в точное уравнение движения.

При малых ξ^μ решение уравнений (67) можно искать методом последовательных приближений. В линейном приближении ($N = 0$) будем иметь систему однородных линейных дифференциальных уравнений, два из которых ($\mu = 0, 3$) не содержат членов без производных

$$\frac{d^2 \xi^A}{dt^2} + \gamma_1^A \frac{d \xi^1}{dt} = 0; \quad A = 0, 3. \quad (69)$$

Поскольку величины γ_1^A являются функциями только r и θ и принимают на невозмущенной траектории постоянное значение, можно проинтегрировать (69), выразив производные от возмущений временной и азимутальной координат через возмущение координаты ξ^1

$$\frac{d \xi^A}{dt} = -\gamma_1^A \xi^1. \quad (70)$$

Учитывая соотношение (70) в уравнении (67) для $\mu=1$, получим отдельное уравнение для возмущения ξ^1 :

$$\frac{d^2 \xi^1}{dt^2} + \omega_r^2 \xi^1 = 0, \quad (71)$$

описывающее свободные радиальные колебания около круговых орбит. Частота колебаний определяется из соотношения

$$\omega_r^2 = \frac{\partial U^1}{\partial r} - \gamma_A^1 \gamma_1^A \quad (72)$$

(где подразумевается суммирование по значениям $A=0,3$). Условие $\omega_r^2 > 0$, очевидно, является условием радиальной устойчивости круговых орбит. Заметим, что в рассматриваемой системе координат и при сделанном выборе параметров радиальные колебания сопровождаются осцилляциями азимутальной и временной координат согласно соотношению (70). Именно если

$$\xi^1 = \xi_0^1 \sin(\omega_r t + \delta), \quad (73)$$

то

$$\xi^A = \xi_0^1 \gamma_1^A \omega_r^{-1} \cos(\omega_r t + \delta). \quad (74)$$

Колебания в направлении θ (т. е. аксиальные) описываются уравнением (67) при $\mu=2$ (при этом $\gamma_\alpha^2 = 0$)

$$\frac{d^2 \xi^2}{dt^2} + \omega_\theta^2 \xi^2 = 0, \quad (75)$$

где частота определяется формулой

$$\omega_\theta^2 = \left. \frac{\partial U^2}{\partial \theta} \right|_{\substack{\theta = \frac{\pi}{2} \\ r = r_0}}. \quad (76)$$

Условие $\omega_\theta^2 > 0$ определяет область устойчивости круговых орбит относительно возмущений, выводящих частицу из экваториальной плоскости.

Подставляя в формулы (72) и (76) явные выражения для символов Кристоффеля и компонент максвелловского тензора поля Керра — Ньюмена (1.5), (1.7), получим [76]:

$$\begin{aligned} \omega_r^2 = & \frac{c^2 \Delta M}{r^5} - 4\omega_S^2 c^2 \left(\frac{Mr + a^2 - Q^2}{r^2} - \frac{2a\omega_0}{c} \right) - \\ & - \frac{c\omega_Q}{r} \left(1 - \frac{6M}{r} + \frac{5Q^2}{r^2} - \frac{3a^2}{r^2} + \frac{4a\omega_0}{c} \right) - \omega_Q^2, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\omega_\theta^2 = \omega_S^2 c^2 \left[1 + \frac{a^2}{r^4} (r^2 + 4Mr - 2Q^2) \right] + \frac{(2Mr - Q^2)}{r^4} \left(\frac{a^2 c^2}{r^2} - 2a\omega_0 \right) -$$

$$-\frac{\omega_Q^c}{r} \left[1 + \frac{3a^2}{r^2} + \frac{2a^2}{r^4} (2Mr - Q^2) - \frac{2a\omega_0}{c} \right], \quad (78)$$

где

$$\omega_S^2 = \frac{Mr - Q^2}{r^4}; \quad \omega_Q = \frac{eQ}{\mu u^0} \frac{1}{r^2}; \quad c = 1 - a\omega_0. \quad (79)$$

и угловая частота кругового (невозмущенного) движения равна

$$\omega_0 = (1 - a^2\omega_S^2)^{-1} \left\{ \pm \left[\omega_S^2 - \frac{\omega_Q}{r} \left(1 - \frac{a^2\omega_Q}{4r} \right) \right]^{1/2} - a \left(\omega_S^2 - \frac{\omega_Q}{2r} \right) \right\}. \quad (80)$$

Энергия частицы, движущейся по невозмущенной круговой орбите, выражается через ω_0 следующим образом:

$$E = \mu \left[1 - \frac{2Mr - Q^2}{r^2} (1 - a\omega_0) \right] \times \\ \times \left\{ 1 - \omega_0^2 (r^2 + a^2) - \frac{2Mr - Q^2}{Mr - Q^2} [\omega_0^2 r^2 + \omega_Q r (1 - a\omega_0)] \right\}^{-1/2}. \quad (81)$$

С помощью формул (77), (78) при $Q=0$ получим известные условия устойчивости круговых геодезических в метрике Керра [73]:

$$\omega_r^2 \equiv \omega_K^2 \left(1 - \frac{6M}{r} - \frac{3a^2}{r^2} \pm 8a\omega_S \right) > 0, \quad (82)$$

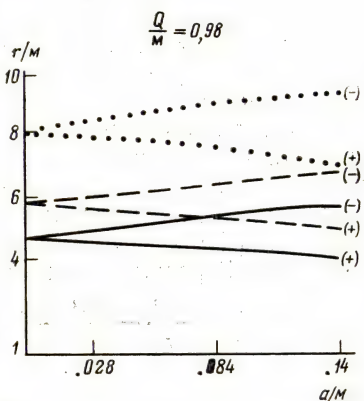
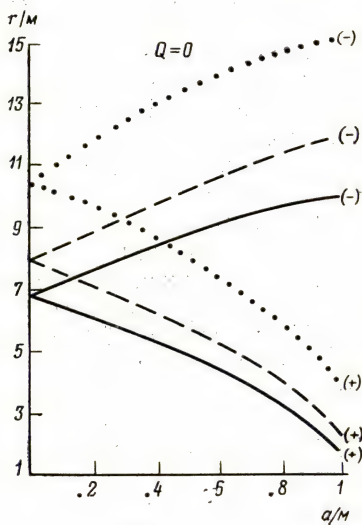
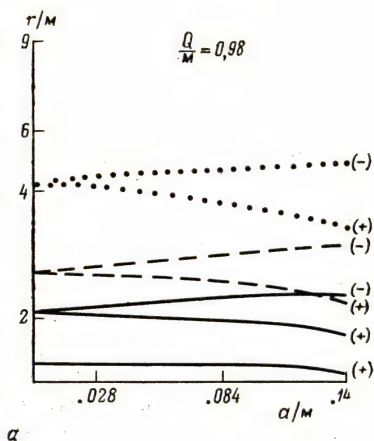
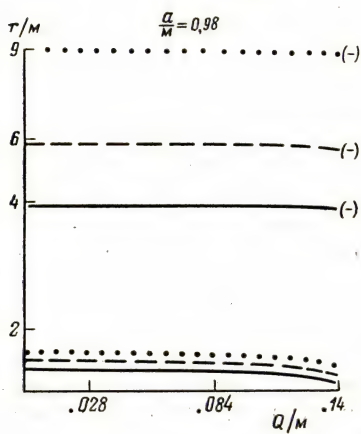
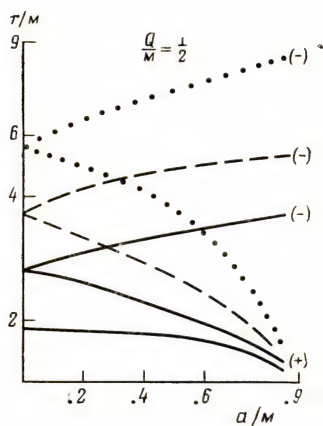
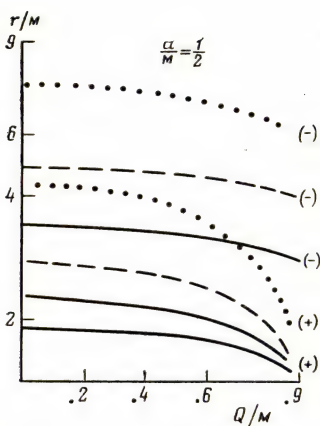
$$\omega_\theta^2 \equiv \omega_K^2 (1 \mp 4a\omega_S + 3a^2/r^2) > 0. \quad (83)$$

Величина (83) положительна при $r > r_+$ для обоих направлений вращения, т. е. круговые геодезические в метрике Керра устойчивы относительно аксиальных возмущений. Границы радиальной устойчивости $\omega_r^2 = 0$ были найдены численно в работе [73] (см. также [77–79]).

В случае $a=0$ (т. е. метрики Рейсснера — Нордстрема) результаты (77), (78) совпадают с полученными в [80]. Кривые существования устойчивости и связанности ($\gamma=1$) круговых орбит для ненулевых значений обоих параметров a и Q приведены на рис. 5, а. Отметим, что с ростом электрического заряда границы существования и устойчивости смещаются в направлении горизонта как для прямого, так и обратного вращений пробных частиц.

Получим теперь выражения для частот радиальных и аксиальных колебаний заряженных частиц, движущихся вокруг вращающейся черной дыры, погруженной в (слабое) однородное магнитное поле. Для этого подставим в (68) и далее в (72) и (76) символы Кристоффеля (1.5) при $Q=0$ и компоненты максвелловского тензора (58). В результате найдем

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{6M}{r} - \frac{3a^2}{r^2} - 8a^2\omega_S^2 \right) + \omega_0\omega_B \left(1 - \frac{6M}{r} - \frac{3a^2}{r^2} \right) +$$



$$+ 4a\omega_S^2(2\omega_0 + \omega_B) + \omega_B^2 \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{Ma^2}{r} \omega_S^2 + 2a^2\omega_S^2 \right), \quad (84)$$

$$\omega_\theta^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} + 4a^2\omega_S^2 \right) + \omega_0\omega_B \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) - 2a\omega_S^2(2\omega_0 + \omega_B). \quad (85)$$

Определяемые отсюда области устойчивости при $a=0$ совпадают с результатами предыдущего раздела. Анализ формулы (84) при $a \neq 0$ показывает, что при достаточно большой величине магнитного поля область радиальной устойчивости, так же как и в шварцшильдовом случае, расширяется вплоть до горизонта событий.

В случае $a=0$ удается получить явные формулы для частот ω_r и ω_θ и при произвольных значениях магнитного поля (т. е. для метрики Шварцшильда — Эрнста). Используя символы Кристоффеля (2.8) и выражения (2.9) для компонент максвелловского тензора, найдем [81]

$$\omega_r^2 = \left\{ \left(\omega_B^2(1-2\delta)^2 + \frac{4\delta\omega_0^2}{\Lambda} \right) \frac{\Delta}{\Lambda^4 r^2} + \omega_S^2 \left[\left(1 - \frac{6M}{r} \right) \left(1 + \frac{48\Delta}{Mr} \right) - 18\delta^2 \frac{r}{M} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right] \right\}, \quad (86)$$

$$\omega_\theta^2 = \omega_S^2 \left(1 + \frac{2\delta\Delta}{Mr} \right), \quad (87)$$

причем $\omega_B = eB/\mu\omega^0(1-2\delta)$ и частота обращения

$$\omega_0 = \mp \frac{\Lambda^2 \sqrt{\Delta}}{r^2} \lambda_{(\pm)} (1 + \lambda_{(\pm)}^2)^{-1/2},$$

$$\lambda = -\frac{1}{2\alpha} \left(\eta \pm \sqrt{\eta^2 + 2\alpha \left(\frac{r}{M} - 1 - \alpha \right)} \right),$$

$$\alpha = \frac{r}{M} - 3 - 4\delta \left(\frac{r}{M} - 2 \right); \quad \eta = \frac{e}{\mu} \frac{B}{B_M} \frac{\Delta}{M^2 \Lambda}. \quad (88)$$

Несовпадение частоты радиальных колебаний с частотой кругового движения имеет общую природу с эффектом прецессии полюсей эллиптических орбит. Действительно, пусть $Q=0$, $a \ll M$; $r \gg M$; тогда возбуждение радиальных колебаний около круговой

Рис. 5. Границы областей существования (сплошные линии), связанности ($\gamma=1$) (пунктир) и радиальной устойчивости (точки) для круговых орбит нейтральных частиц в поле Керра—Ньюмена. Знаки +, — соответствуют прямым и обратным орбитам (а); резонансы низших порядков: $k=3$ (пунктир), $k=4$ (сплошная), $k=5$ (точки) (б)

орбиты эквивалентно квазиэллиптическому движению с углом поворота полуосей за период

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(1 - \frac{\omega_r}{\omega_0} \right) \approx \frac{6M\mu}{r}. \quad (89)$$

Несовпадение частот ω_0 и ω_θ соответствует в случае слабого поля ($a \neq 0$) прецессии Лензе — Тирринга (см. также [82]). При $a=0$ частоты ω_0 и ω_θ совпадают, в этом случае аксиальные колебания фиктивны и могут быть устранены координатным преобразованием, отвечающим повороту плоскости орбиты.

При учете нелинейных членов в правой части уравнения (67) возникает связь между орбитальным движением и колебаниями, а также между двумя типами колебаний. Если частоты ω_r , ω_0 и ω_θ становятся соизмеримыми, в системе появляются резонансы и характер движения может качественно измениться. На рис. 5, 6 показаны положения резонансов $k_r\omega_r = k_\theta\omega_\theta$, k_r и k_θ — целые числа, низших порядков $k = |k_r| + |k_\theta|$, $k=3, 4, 5$, при различных значениях заряда Q поля Керра — Ньюмена (ω_r и ω_θ определяются из (77), (78)). Эти кривые оказываются лежащими в области существования круговых орбит и частично в области устойчивости, определяемой в рамках линейного приближения.

БЕЗМАССОВЫЕ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ-
ВРЕМЕНИ КЕРРА

Обобщение волновых уравнений для полей различного спина на искривленное пространство-время, вообще говоря, не сводится к замене частных производных на ковариантные. Пространство-время, искривленное гравитационным полем, характеризуется новыми геометрическими величинами — тензором кривизны и связанными с ним тензором Риччи, скалярной кривизной и т. д., которые обращаются в нуль при переходе к пространству Минковского. Неудивительно, что «правильные» уравнения для физических полей в искривленном пространстве-времени в ряде случаев будут содержать неминимальные члены, зависящие от тензора кривизны. Заметим, что для полей высших спинов минимальное взаимодействие с гравитационным полем не удастся ввести непротиворечивым образом [83, 84]. Как правило, характер взаимодействия рассматриваемого материального поля с гравитационным полем в рамках той или иной динамической теории определяется условиями симметрии (конформной инвариантности, суперсимметрии и т. п.).

§ 4. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Лагранжев формализм

Естественным требованием симметрии для безмассового скалярного поля представляется условие конформной инвариантности: ввиду отсутствия в теории параметра размерности длины уравнения не должны изменять своего вида при конформном преобразовании метрики

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (1)$$

где $\Omega(x)$ — некоторая гладкая функция. Нетрудно, однако, убедиться в том, что ковариантный оператор Даламбера $\nabla_\mu \nabla^\mu$ при преобразовании (1) не сохраняет свой вид: на множестве скалярных функций

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \rightarrow \Omega^{-3} [\nabla_\mu \nabla^\mu - \Omega^{-1} (\nabla_\mu \nabla^\mu \Omega)] \Omega. \quad (2)$$

Тем не менее, заметив, что скалярная кривизна R при конформном преобразовании ведет себя аналогичным образом:

$$R \rightarrow \Omega^{-2} (R - 6\Omega^{-1} \nabla_\mu \nabla^\mu \Omega), \quad (3)$$

для компенсации членов с производными от Ω можно построить комбинацию

$$\nabla_\mu \nabla^\mu - \frac{1}{6} R \rightarrow \Omega^{-3} \left(\nabla_\mu \nabla^\mu - \frac{1}{6} R \right) \Omega. \quad (4)$$

Если принять, что при преобразовании (1) поле изменяется как

$$\psi(x) \rightarrow \Omega^{-1}(x) \psi(x), \quad (5)$$

то, как легко проверить, уравнение вида

$$\left(\nabla_\mu \nabla^\mu - \frac{1}{6} R \right) \psi(x) = 0 \quad (6)$$

будет сохранять свой вид при конформном преобразовании [85, 86]. Небезынтересно отметить, что даже если изначально не вводить неминимальный член $1/6 R$ в уравнение для скалярного поля, то он все равно появится из-за радиационных поправок в квантовой теории скалярного поля с самодействием в искривленном пространстве-времени [87].

Вводя для общности численный коэффициент ξ перед членом, пропорциональным кривизне, запишем действие для вещественного безмассового скалярного поля в виде

$$S = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x + \frac{\xi}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} \chi \psi^2 \sqrt{|h|} d^3x, \quad (7)$$

где второй интеграл берется по границе $\partial\mathcal{M}$ многообразия \mathcal{M} , а лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + \xi R \psi^2 \right) \quad (8)$$

($\xi=0$ соответствует минимальной, а $\xi=1/6$ — конформно-инвариантной связи с гравитационным полем). Добавление второго (граничного) члена в действие (7), в котором интегрирование ведется по границе многообразия ($h = \det h_{ij}$, h_{ij} — индуцируемая на границе метрика, χ — след второй фундаментальной формы на границе), необходимо для возможности использования (7) в качестве действия материального поля при получении уравнений Эйнштейна. Причина в том, что в выражении для скалярной кривизны R имеются члены, линейные по вторым производным от метрики, и при варьировании действия по $g_{\mu\nu}$ будут возникать поверхностные члены, пропорциональные производным от вариаций $g_{\mu\nu}$, обращение в нуль которых заранее не требуется. Для компенсации этих вкладов в действие для гравитационного поля необходимо ввести поверхностный член [88]

$$\frac{1}{8\pi G} \int \chi \sqrt{|h|} d^3x$$

и аналогичный член в действие для скалярного поля (7), поскольку лагранжиан (8) также содержит R [138, 139].

Варьирование действия (7) по ψ приводит к уравнению

$$\left(\nabla_\mu \nabla^\mu - \frac{\xi}{6} R \right) \psi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \right) - \xi R \psi = 0. \quad (9)$$

В случае вакуумных и электровакуумных метрик скалярная кривизна R равна нулю и уравнение (6) имеет одинаковый вид для полей с минимальной и конформной связью. Однако метрический тензор энергии-импульса зависит от ξ [15, 16, 86] и в случае $R_{\mu\nu} = 0$:

$$T_{\mu\nu}^{(\text{метр})} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\mathcal{L} \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \psi_{,\mu} \psi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \psi_{,\alpha} \psi^{,\alpha} + \right. \right. \\ \left. \left. + \xi \left(\frac{1}{2} R - \Delta_\alpha \nabla^\alpha \right) \psi^2 \right] + \xi (R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu) \psi^2 \right\}. \quad (10)$$

След метрического тензора при выполнении уравнения поля (9) равен

$$T^{(\text{метр})} = \frac{6\xi - 1}{4\pi} (\psi_{,\alpha} \psi^{,\alpha} + \xi R^2 \psi), \quad (11)$$

он обращается в нуль в случае конформно-инвариантной связи, $\xi = 1/6$. Заметим, что метрический тензор не совпадает с каноническим при $\xi \neq 0$ из-за наличия производных от метрики в лагранжиане (8).

Законы сохранения

Как и следовало ожидать, в силу уравнения (9) ковариантная производная от тензора энергии импульса равна нулю

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (12)$$

В искривленном пространстве-времени из (12), вообще говоря, не следуют законы сохранения для каких-либо величин. Это не удивительно, поскольку законы сохранения возникают при наличии пространственно-временных симметрий, которые в искривленном пространстве-времени общего вида отсутствуют. Если же имеется симметрия, выражающаяся в существовании векторного поля Киллинга ξ , то соответствующий закон сохранения действительно вытекает из уравнения (12). В этом случае равенство нулю ковариантной производной сводится к равенству нулю обычной производной от векторной плотности

$$\mathcal{E}^\nu \equiv T^{\mu\nu} \xi_\mu \sqrt{-g},$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}^\nu}{\partial x^\nu} = \sqrt{-g} \nabla_\nu (T^{\mu\nu} \xi_\mu) = \sqrt{-g} (\xi_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu}) = 0, \quad (13)$$

где второе слагаемое в нижней строчке исчезает в силу симметрии $T^{\mu\nu}$ и антисимметрии $\xi_{(\mu;\nu)}$.

Чтобы получить из (13) закон сохранения для случая черных дыр, рассмотрим четырехмерную область Ω в виде коаксиального цилиндра с осью вдоль t и боковыми поверхностями $d\Omega_+$ и $d\Omega_\infty$, лежащими на горизонте событий и пространственной бесконечности соответственно. Пусть S_1 и S_2 — сечения цилиндра плоскостями $t=t_1$ и $t=t_2 > t_1$. Тогда, интегрируя (13) по области Ω и используя теорему Гаусса, будем иметь

$$0 = \int \frac{\partial \mathcal{E}^\nu}{\partial x^\nu} d^4x = \int_{\partial\Omega} T^{\mu\nu} \xi_\mu \sqrt{-g} dS_\nu, \quad (14)$$

где замкнутая граница $\partial\Omega$ состоит из четырех частей

$$\partial\Omega = \partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_\infty \cup S_1 \cup S_2 \quad (15)$$

и элемент интегрирования должен иметь внешнюю нормаль. Обозначим интеграл от \mathcal{E}^μ по времениподобной гиперповерхности S с нормалью, направленной в будущее, через

$$\mathcal{E}(S) = \int_S \mathcal{E}^\mu dS_\mu. \quad (16)$$

Тогда равенство (14) можно представить в виде соотношения

$$\mathcal{E}(S_1) - \mathcal{E}(S_2) = \int_{\partial\Omega_+} \mathcal{E}^\mu dS_\mu + \int_{\partial\Omega_\infty} \mathcal{E}^\mu dS_\mu, \quad (17)$$

выражающего изменение величины \mathcal{E} за время от t_1 до t_2 (в (17) учтено, что внешняя нормаль к S_1 направлена в прошлое) в терминах соответствующих потоков через горизонт событий и бесконечно удаленную поверхность. Если интегралы в правой части (17) равны нулю, т. е. такие потоки отсутствуют, то величина \mathcal{E} не зависит от времени $\mathcal{E} = \text{const}$. В общем случае соотношение (17) позволяет выразить изменение величины \mathcal{E} внутри области вследствие поглощения черной дырой и ухода на бесконечность. При вычислении интеграла по поверхности горизонта событий вместо координаты t следует выбрать «время» в системе координат, не сингулярной на горизонте, например $\{v, r, \theta, \Phi\}$. Тогда элемент поверхности dS_μ горизонта с нормалью, направленной внутрь, можно записать в ковариантном виде [89]:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} dS_\mu &= \Sigma \sin \theta dS_\mu = l'_\mu (r_+^2 + a^2) \sin \theta d\theta d\Phi dv = \\ &= l'_\mu (r_+^2 + a^2) \sin \theta d\theta d\Phi dt, \end{aligned} \quad (18)$$

где l' — вектор тетрады (1.61), не сингулярной на горизонте бу-

душего; его контравариантные компоненты в системе координат $\{v, r, \theta, \varphi\}$ равны на горизонте (см. (1.62))

$$l'_\mu|_{r=r_+} = (0, -1, 0, 0). \quad (19)$$

При переходе от верхней строчки к нижней в (4.18) учтено, что якобиан преобразования от $\{\theta, \Phi\}$ к $\{t, \varphi\}$ равен единице.

Выбирая в качестве S_1 и S_2 гиперповерхности ортогональные t и разделенные интервалом времени dt , и обозначая элемент телесного угла через $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, из формулы (17) имеем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \oint [(T^{\mu\nu}\xi_\mu)|_{r=r_+} l'_\nu(r_+^2 + a^2) + \lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 T^{\mu 1}\xi_\mu)] d\Omega, \quad (20)$$

поскольку на бесконечности пространство-время становится плоским и, следовательно,

$$\sqrt{-g} dS_\mu = \delta_{\mu 1} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dt. \quad (21)$$

Формула (20) выражает изменение величины \mathcal{E} в единицу времени в виде суммы соответствующих полных потоков через горизонт событий и бесконечно удаленную поверхность. Физический смысл величины \mathcal{E} определяется характером векторного поля ξ . В случае стационарных черных дыр имеются два векторных поля Киллинга $\xi_{(t)}$ и $\xi_{(\varphi)}$ (1.8), (1.9), отвечающих преобразованиям сдвига по времени и вращения вокруг оси симметрии; соответствующие им величины $\mathcal{E}_{(t)}$ и $\mathcal{E}_{(\varphi)}$ имеют смысл плотности энергии и проекции момента поля на направление вращения черной дыры. Изменения массы M и углового момента J черной дыры в силу глобального сохранения энергии и момента [26] выражаются первым интегралом в (20), в который следует подставить временной и азимутальный векторы Киллинга

$$\frac{dM}{dt} = \oint_{r_+} T^{\mu\nu}\xi_{(t)\mu} l'_\nu(r_+^2 + a^2) d\Omega, \quad (22)$$

$$\frac{dJ}{dt} = - \oint_{r_+} T^{\mu\nu}\xi_{(\varphi)\mu} l'_\nu(r_+^2 + a^2) d\Omega \quad (23)$$

(знак «минус» в (23) обусловлен выбором сигнатуры метрики $(+---)$). С помощью первого закона термодинамики для черных дыр (1.27) отсюда можно получить выражение для скорости изменения площади поверхности горизонта событий. Учитывая, что в рассматриваемом случае нейтрального поля $dQ=0$, найдем

$$\frac{\kappa}{8\pi} \frac{dA}{dt} = \frac{dM}{dt} - \Omega_H \frac{dJ}{dt} = \int T^{\mu\nu} l'_\mu l'_\nu (r_+^2 + a^2) d\Omega, \quad (24)$$

где учтено, что на горизонте событий (в координатах $\{v, r, \theta, \Phi\}$)

$$\xi_{(t)}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial v}; \quad \xi_{(\Phi)}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \quad (25)$$

и с учетом (1.63)

$$l'^\mu = \xi_{(t)}^\mu + \Omega_\mu \xi_{(\Phi)}^\mu. \quad (26)$$

Потери энергии и проекции момента поля вследствие переноса через удаленную поверхность, определяемые вторым членом в (20) с учетом явного вида векторов Киллинга можно представить в виде

$$\frac{d\mathcal{E}_A^\infty}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \oint T_A^1 d\Omega; \quad A=0, 3, \quad (27)$$

где $A=0$ соответствует энергии, а $A=3$ — проекции углового момента на ось симметрии.

Формулы (22), (23), (24), (27), полученные без использования явного выражения для тензора энергии-импульса, справедливы и для полей других спинов.

Формализм изотропной тетрады

Откладывая исследование общего случая метрики Керра — Ньюмена до гл. VII, где будет рассматриваться массивное заряженное скалярное поле, обратимся к дальнейшему анализу уравнения для вещественного безмассового скалярного поля в пространстве-времени Керра. Возможность разделения переменных в волновом уравнении (9) при $R=0$ была показана Картером [24], и затем явное решение задачи получено в [90]. Как и в случае уравнения Гамильтона — Якоби (§ 3), полное разделение оказывается возможным благодаря существованию тензорного поля Штеккеля — Киллинга (1.57). Можно показать, что два дифференциальных оператора первого порядка

$$\hat{E} = i\xi_{(t)}^\mu \nabla_\mu; \quad \hat{L} = -i\xi_{(\Phi)}^\mu \nabla_\mu \quad (28)$$

и оператор второго порядка

$$\hat{K} = \nabla_\mu a^{\mu\nu} \nabla_\nu \quad (29)$$

коммутируют с оператором Даламбера $\square = -\nabla_\mu \nabla^\mu$ на множестве решений уравнения $\square\psi=0$. Для операторов (4.28) это следует из соотношений

$$\square \xi^\mu = R^{\mu\nu} \xi_\nu; \quad [\nabla_\mu, \square] \psi = R_{\mu\nu} \nabla^\nu \psi \quad (30)$$

(в рассматриваемом случае $R_{\mu\nu}=0$) и антисимметрии $\xi_{\mu;\nu}$, а для квадратичного оператора (29) — из соотношений (1.28), (1.30) [45] (при $R=0$).

Введем операторы Ньюмена — Пенроуза (производные по направлениям векторов тетрады)

$$\begin{aligned} D &= (l^\mu \nabla_\mu); \quad \Delta = (n^\mu \nabla_\mu); \\ \delta &= (m^\mu \nabla_\mu); \quad \delta^* = (m^{*\mu} \nabla_\mu). \end{aligned} \quad (31)$$

С помощью соотношений (1.52) нетрудно проверить, что операторы, получающиеся в результате перестановки ∇_μ и векторов тетрады в (31), можно записать в виде

$$\begin{aligned} \nabla_\mu l^\mu &= D - \rho - \rho^*, \\ \nabla_\mu n^\mu &= \Delta + \mu + \mu^* - \gamma - \gamma^*, \\ \nabla_\mu m^\mu &= \delta + 2\beta - \tau, \end{aligned} \quad (32)$$

где были учтены соотношения между спинowymi коэффициентами (1.53). Записывая теперь контравариантный метрический тензор в виде разложения по векторам тетрады, представим оператор Даламбера в форме

$$\begin{aligned} \square &= -2\nabla_\mu (l^{(\mu} n^{\nu)} - m^{(\mu} m^{*\nu)}) \nabla_{\nu} = \\ &= -(D - \rho - \rho^*) \Delta - (\Delta + \mu + \mu^* - \gamma - \gamma^*) D + \\ &\quad + (\delta + 2\beta - \tau) \delta^* + (\delta^* + 2\beta^* - \tau^*) \delta. \end{aligned} \quad (33)$$

Для дальнейшего анализа волновых уравнений в метрике Керра целесообразно ввести следующий набор операторов [91, 92]:

$$\mathcal{D}_n = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{a}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2n \frac{r - M}{\Delta}, \quad (34)$$

$$\mathcal{D}_n^+ = \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{a}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2n \frac{r - M}{\Delta}, \quad (35)$$

$$\mathcal{L}_s = \frac{\partial}{\partial \theta} + s \operatorname{ctg} \theta - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - ia \sin \theta \frac{\partial}{\partial t}, \quad (36)$$

$$\mathcal{L}_s^+ = \frac{\partial}{\partial \theta} + s \operatorname{ctg} \theta + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + ia \sin \theta \frac{\partial}{\partial t}, \quad (37)$$

где n и s — целые или полуцелые числа (или нуль). В терминах этих операторов введенные выше производные по направлениям (применительно к скалярам) принимают вид

$$D = \mathcal{D}_0; \quad \Delta = -\frac{\Delta}{2\Sigma} \mathcal{D}_0^+; \quad \delta = -\frac{\rho^*}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_0^+; \quad \delta^* = -\frac{\rho}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_0. \quad (38)$$

В дальнейшем будут постоянно встречаться коммутаторы операторов (34) — (37) с различными степенями спинowych коэффици-

ентов ρ и ρ^* . Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$[\rho^k, \mathcal{D}_n] = -k\rho^{k+1}; [(\rho^*)^k, \mathcal{D}_n] = -k(\rho^*)^{k+1} \quad (39)$$

(аналогично для \mathcal{D}_{n^+}), а также

$$[\rho^k, \mathcal{L}_s] = -ika \sin \theta \rho^{k+1}; [(\rho^*)^k, \mathcal{L}_s] = ika \sin \theta (\rho^*)^{k+1} \quad (40)$$

(и аналогично для \mathcal{L}_{s^+}). Воспользовавшись также легко проверяемым тождеством

$$\mathcal{D}_n \Delta^k = \Delta^k \mathcal{D}_{n+k} \quad (41)$$

(то же для \mathcal{D}_{n^+}) и учитывая явный вид спиновых коэффициентов (1.53), можно получить следующие представления для семейств операторов типа (32) (применительно к скалярам) с коэффициентами более общего вида:

$$\delta + n\pi^* + k\tau + 2s\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rho^{n+1} \rho^{-k} \mathcal{L}_s^+ \rho^k \rho^{*-n}, \quad (42)$$

$$\delta^* + n\pi + k\tau^* + 2s\beta^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rho^{n+1} \rho^{*-k} \mathcal{L}_s \rho^{*k} \rho^{-n} \quad (43)$$

$$D + k\rho + n\rho^* = \rho^{-k} \rho^{*-n} \mathcal{D}_0 \rho^k \rho^{*n} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \Delta + n\gamma + n'\gamma^* + k\mu + k'\mu^* = & -\frac{\Delta}{2} \rho^{(n+k+1)} \rho^{*(n'+k'+1)} \times \\ & \times \mathcal{D}_{-(n+n')/2}^+ \rho^{-(n+k)} (\rho^*)^{-(n'+k')} \end{aligned} \quad (45)$$

(n, n', s, s', k, k' — целые, полуцелые числа или нуль).

Используя соотношения (41)–(45), оператор Даламбера (33) можно представить в форме

$$\square = \frac{1}{2\Sigma} [\Delta (\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_0^+ + \mathcal{D}_1^+ \mathcal{D}_0) + (\mathcal{L}_1^+ \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^+)]. \quad (46)$$

В квадратных скобках здесь стоит сумма операторов, один из которых не зависит от θ (и не содержит дифференцирования по θ), а второй не зависит от r (и не содержит дифференцирования по r). Кроме того, координаты t и φ входят лишь в производные. Поэтому коммутативность (46) с операторами (28), имеющими явный вид

$$\hat{E} = i \frac{\partial}{\partial t}; \quad \hat{L} = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (47)$$

очевидна. Квадратичный оператор \mathcal{K} (29) с помощью представления (1.57) тензора Штеккеля — Киллинга и формул (32) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{K} = & (\delta + 2\beta - \tau) r^2 \delta^* + (\delta^* + 2\beta^* - \tau^*) r^2 \delta + \\ & + (\Delta + \mu + \mu^* - \gamma - \gamma^*) a^2 \cos^2 \theta D + (D - \rho - \rho^*) a^2 \cos^2 \theta \Delta. \end{aligned} \quad (48)$$

и далее, воспользовавшись соотношениями (41)–(45), привести его на множестве скалярных функций к форме

$$\hat{K} = \frac{1}{2\Sigma} [r^2 (\mathcal{L}_1^+ \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^+) - a^2 \cos^2 \theta \Delta (\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_0^+ + \mathcal{D}_1^+ \mathcal{D}_0)]. \quad (49)$$

Заменив в первом слагаемом в квадратных скобках r^2 на $\Sigma - a^2 \cos^2 \theta$ и сопоставляя результат с (46), найдем

$$\hat{K} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_1^+ \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^+) - a^2 \cos^2 \theta \square. \quad (50)$$

На множестве решений уравнения Даламбера $\square \psi = 0$ второй член обращается в нуль, и мы получаем

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_1^+ \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^+) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{(\hat{L} - a \sin^2 \theta \hat{E})^2}{\sin^2 \theta}. \quad (51)$$

При $a=0$ оператор (51), очевидно, сводится к оператору квадрата углового момента

$$\hat{K}_0(a=0) = -L^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (52)$$

Разделение переменных

Построим сначала систему общих собственных функций коммутирующих операторов \hat{L} , \hat{E} и \hat{K} :

$$\hat{E} \psi_{\omega m \lambda} = \omega \psi_{\omega m \lambda}; \quad (53)$$

$$\hat{L} \psi_{\omega m \lambda} = m \psi_{\omega m \lambda}; \quad (54)$$

$$\hat{K}_0 \psi_{\omega m \lambda} = -\lambda \psi_{\omega m \lambda}, \quad (55)$$

где ω , m и λ — собственные значения. Решениями уравнений (53) и (54) являются экспоненты

$$\psi_{\omega m \lambda} = \tilde{\psi}_{\omega m \lambda}(\theta, r) e^{-i\omega t + im\varphi}, \quad (56)$$

а уравнение (55) имеет стандартную форму уравнения для сплюснутых сфероидальных функций [93] $S_{lm}^{a\omega}(\cos \theta)$ с собственным значением λ . Нумерация собственных значений и собственных функций оператора K_0 осуществляется целым неотрицательным числом l , причем для $a=0$, $\lambda = l(l+1)$ (см. Дополнение). Поэтому

$$\psi_{\omega m \lambda} \sim R_{lm}^{\omega}(r) S_{lm}^{a\omega}(\cos \theta) \quad (57)$$

и в результате общие собственные функции операторов (53) — (55) принимают вид

$$\Psi_{\omega m \lambda} \equiv \Psi_{\omega l m} = (2\pi)^{-1/2} R_{lm}^{\omega}(r) S_{lm}^{\omega}(\cos \theta) e^{-i\omega t + im\varphi}, \quad (58)$$

где $R_{\omega l m}(r)$ — радиальная функция, подлежащая определению из уравнения Даламбера $\square \Psi_{\omega l m} = 0$. Функции $S_{lm}^{\omega}(\cos \theta)$ вещественны и образуют ортогональную систему, которую условимся нормировать с помощью равенства

$$\int_{-1}^1 S_{l'm}^{\omega}(\cos \theta) S_{lm}^{\omega}(\cos \theta) d \cos \theta = \delta_{ll'}. \quad (59)$$

Будут также использоваться полные сфероидальные гармоники

$$Z_{lm}^{\omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_{lm}^{\omega}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (60)$$

очевидно, удовлетворяющие условию ортонормированности

$$\oint Z_{l'm'}^{\omega*}(\theta, \varphi) Z_{lm}^{\omega}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (61)$$

Подставляя функции (58) в уравнение Даламбера (9), для радиальной части $R_{lm}^{\omega}(r)$ найдем

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \Delta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathcal{K}^2}{\Delta} + \lambda \right) R_{lm}^{\omega} = 0, \quad (62)$$

где введено обозначение

$$\mathcal{K}^2 = \omega(r^2 + a^2) - am. \quad (63)$$

Переходя к черепашьей координате $dr^* = (r^2 + a^2) dr / \Delta$,

$$r^* = r + \frac{M}{\sqrt{m^2 - a^2}} \left(r_+ \ln \frac{r - r_+}{r_+} - r_- \ln \frac{r - r_-}{r_-} \right) \quad (64)$$

и новой радиальной функции

$$\chi_{lm}^{\omega}(r) = (r^2 + a^2)^{1/2} R_{lm}^{\omega}(r), \quad (65)$$

получим уравнение, не содержащее первой производной

$$\frac{d^2}{dr^{*2}} \chi_{lm}^{\omega} - U(r) \chi_{lm}^{\omega} = 0, \quad (66)$$

где эффективный потенциал равен

$$U(r) = \frac{1}{(r^2 + a^2)^2} \left[-\mathcal{K}^2 + \lambda \Delta + \frac{2(Mr - a^2)}{r^2 + a^2} \Delta + \frac{3a^2 \Delta^2}{(r^2 + a^2)^2} \right]. \quad (67)$$

Уравнение (65) имеет вид одномерного уравнения Шредингера с

короткодействующим потенциалом. При $r \rightarrow \infty$ выражение (66) стремится к постоянной

$$U(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} -\omega^2, \quad (68)$$

и, следовательно, существуют решения $u^{(\pm)}$, представляющие собой асимптотически расходящиеся и сходящиеся волны:

$$u^{(\pm)}(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{\pm i\omega r} \quad (69)$$

(здесь учтено, что при $r \rightarrow \infty$, $r^* \sim r$).

По мере приближения к горизонту событий $r \rightarrow r_+$ ($r^* \rightarrow -\infty$) потенциал $U(r)$ также стремится к константе

$$U(r_+) = -k^2 \equiv -(\omega - m\Omega_H)^2, \quad (70)$$

где Ω_H — угловая скорость черной дыры (1.21), и, значит, существуют решения $v^{(\pm)}$, обладающие вблизи горизонта асимптотическим поведением

$$v^{(\pm)} \underset{r^* \rightarrow -\infty}{\sim} e^{\pm ikr^*} = e^{\pm i(\omega - m\Omega_H)r^*}. \quad (71)$$

Поскольку величина k является знакопеременной (при $\omega > 0$), физический смысл решений (71) заранее не очевиден. Для того чтобы выяснить, является ли волна в окрестности горизонта сходящейся или расходящейся, нужно перейти в систему отсчета физического наблюдателя, который внутри эргосферы должен вращаться с угловой скоростью, лежащей в интервале (1.15). При $r \rightarrow r_+$ эта угловая скорость стремится к угловой скорости черной дыры. Для такого наблюдателя координата φ в выражении (58) $\varphi = \Omega_H t$ и, следовательно, (локальная) координатная зависимость полевых мод от t и r такова:

$$\psi \sim e^{-i(\omega - m\Omega_H)t \pm i(\omega - m\Omega_H)r^*}. \quad (72)$$

Из этих рассуждений следует, что решение $v^{(+)}$ (71) представляет собой вблизи горизонта событий расходящуюся, а $v^{(-)}$ — сходящуюся волну, хотя фазовая скорость для $v^{(+)}$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \left(1 - \frac{m\Omega_H}{\omega}\right)^{-1} \quad (73)$$

при $\omega < m\Omega_H$ меняет знак. Заметим, что групповая скорость при этом остается знакоопределенной:

$$v_{\text{гп}} = \partial\omega / \partial k = 1. \quad (74)$$

Поскольку эффективный потенциал (67) имеет вид потенциально-го барьера, спадающего при $r^* \rightarrow \pm\infty$, расходящаяся при $r \rightarrow \infty$

волна в области слева от барьера будет представлять собой суперпозицию падающей и отраженной волн

$$\chi^{up} = (2|\omega|)^{-1/2} u^{(+)} = (2|k|)^{-1/2} \left(v^{(+)} \frac{1}{\tau} - \frac{\sigma^*}{\tau^*} v^{(-)} \right) \varepsilon(k\omega), \quad (75)$$

где параметры τ и σ определяют коэффициенты прохождения и отражения от барьера. Здесь символом $\varepsilon(k\omega)$ обозначена знаковая функция

$$\varepsilon(k\omega) \equiv \frac{k\omega}{|k\omega|} \quad (76)$$

и индексы ω, l, m опущены.

Второе линейно независимое решение удобно выбрать так, чтобы при $r \rightarrow r_+$ присутствовала только падающая волна

$$\chi^{in} = (2|\omega|)^{-1/2} (u^{(-)} + \sigma u^{(+)}) = (2|k|)^{-1/2} \tau v^{(-)}, \quad (77)$$

что соответствует волне, приходящей из бесконечности, испытывающей частичное отражение (с коэффициентом отражения $|\sigma|^2$), и частично поглощаемой черной дырой (обозначения in, up соответствуют работе [94]).

Поскольку оператор, стоящий в левой части уравнения (66), вещественный, то χ^{up*} и χ^{in*} также будут решениями этого уравнения. Из условия постоянства вронскианов

$$W(\chi, \chi') \equiv \chi \frac{d\chi'}{dr^*} - \chi' \frac{d\chi}{dr^*}, \quad (78)$$

приравнивая асимптотические значения W при $r^* \rightarrow \pm\infty$ для различных пар из четырех решений $\chi^{in}, \chi^{up}, \chi^{in*}$ и χ^{up*} , получаем соотношение между коэффициентами τ и σ

$$\varepsilon(k\omega) |\tau|^2 + |\sigma|^2 = 1. \quad (79)$$

Второе слагаемое в левой части (79) всегда положительно, в то время как первое слагаемое становится отрицательным (при $\omega > 0$), если

$$k = \omega - m\Omega_H < 0. \quad (80)$$

В этом случае коэффициент отражения $|\sigma|^2$ падающей волны от черной дыры будет больше единицы, т. е. волна испытывает усиление при отражении. В этом состоит предсказанный Я. Б. Зельдовичем и Ч. Мизнером и рассчитанный явно А. А. Старобинским эффект суперрадиации [10—12]. В режиме суперрадиации фазовая скорость падающей на черную дыру волны вблизи горизонта событий направлена от черной дыры (групповая скорость остается направленной внутрь черной дыры).

С учетом равенства (79), выражающего сохранение потока, можно получить следующие соотношения между радиальными функциями и комплексно-сопряженными к ним функциями:

$$\begin{aligned}\chi^{\text{in}} &= \chi^{\text{up}*} + \sigma \chi^{\text{up}}, \\ \chi^{\text{up}} &= |\tau|^{-2} (\chi^{\text{in}} - \sigma^* \chi^{\text{in}}) \varepsilon(k\omega),\end{aligned}\quad (81)$$

которые оказываются полезными при решении задачи о радиационном трении для частиц, движущихся в окрестности черных дыр.

§ 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Уравнения Максвелла в формализме Ньюмена — Пенроуза

Электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ в формализме Ньюмена — Пенроуза описывается совокупностью трех комплекснозначных скалярных функций Φ_0, Φ_1, Φ_2 [48, 51], представляющих собой коэффициенты разложения самодуального бивектора

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} + i\tilde{F}_{\mu\nu}); \quad (1)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} E_{\mu\nu\lambda\tau} F^{\lambda\tau}; \quad E_{\mu\nu\lambda\tau} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} \quad (2)$$

по базису самодуальных бивекторов $l_{[\mu} m_{\nu]}$; $m_{[\mu} n_{\nu]}$; $n_{[\mu} l_{\nu]} + m_{[\mu} m_{\nu]}$:

$$\frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} = \Phi_0 m_{[\mu} n_{\nu]} + \Phi_1 (n_{[\mu} l_{\nu]} + m_{[\mu} m_{\nu]}) + \Phi_2 l_{[\mu} m_{\nu]}. \quad (3)$$

В терминах проекций вещественного максвелловского тензора $F_{\mu\nu}$ величины Φ_0, Φ_1, Φ_2 имеют вид

$$\Phi_0 = F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu, \quad (4)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + m^{\mu*} m^\nu), \quad (5)$$

$$\Phi_2 = F_{\mu\nu} m^{\mu*} n^\nu. \quad (6)$$

Запишем уравнения Максвелла для поля $F_{\mu\nu}$, порождаемого током j^μ :

$$F_{;\nu}^{\mu\nu} = -4\pi j^\mu; \quad (7)$$

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;\nu} = 3F_{[\mu\nu;\lambda]} = 0. \quad (8)$$

Вторую группу уравнений (8) можно эквивалентным образом представить как

$$\tilde{F}_{;\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad (9)$$

где дуальный тензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$ определен согласно (2). В совокупности уравнения (7) и (9) образуют одно уравнение для комплексного самодуального бивектора $\mathcal{F}_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{F}_{;\nu}^{\mu\nu} = -2\pi j^\mu, \quad (10)$$

причем вектор тока в правой части является вещественным. Если формально допустить существование магнитных зарядов и токов, то уравнение (10) останется без изменений, однако под j^μ следует понимать комплексный вектор

$$j^\mu = j_E^\mu + i j_M^\mu, \quad (11)$$

где j_E^μ — ток, создаваемый электрическими, а j_M^μ — магнитными зарядами.

Умножим скалярно правую и левую части (10) поочередно на векторы изотропной тетрады, записав $F_{\mu\nu}$ в форме (3). Учитывая определения спинных коэффициентов (1.51) и ковариантных производных по направлениям векторов тетрады (4.31), получим следующую систему уравнений для скаляров (4) — (6), эквивалентную (10):

$$(D - 2\rho) \Phi_1 - (\delta^* - 2\alpha + \pi) \Phi_0 + \kappa \Phi_2 = -2\pi j_l, \quad (12)$$

$$(\delta - 2\tau) \Phi_1 - (\Delta - 2\gamma + \mu) \Phi_0 + \sigma \Phi_2 = -2\pi j_m, \quad (13)$$

$$(D + 2\varepsilon - \rho) \Phi_2 - (\delta^* + 2\pi) \Phi_1 + \lambda \Phi_0 = -2\pi j_{m^*}, \quad (14)$$

$$(\delta + 2\beta - \tau) \Phi_2 - (\Delta + 2\mu) \Phi_1 + \nu \Phi_0 = -2\pi j_n. \quad (15)$$

В правые части уравнений (12) — (15) входят тетрадные проекции тока

$$j_l = j_\mu l^\mu; \quad j_n = j_\mu n^\mu; \quad j_m = j_\mu m^\mu; \quad j_{m^*} = j_\mu m^{*\mu} \quad (16)$$

(заметим, что при наличии магнитных зарядов $j_{m^*} \neq j_m^*$).

Рассмотрим подробнее систему уравнений (12) — (15) для метрики Керра, в которой $\kappa = \sigma = \lambda = \nu = 0$, и каждое из уравнений содержит не более двух неизвестных функций.

С помощью формул (4.42) — (4.45) уравнения (12) — (15) можно переписать в виде

$$\rho^2 \mathcal{D}_0 \rho^{-2} \Phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_1 \rho \Phi_0 = -2\pi j_l, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \rho^* \rho^2 \mathcal{L}_0^+ \rho^{-2} \Phi_1 - \frac{\Delta}{2} \rho^* \mathcal{D}_1^+ \rho \Phi_0 = 2\pi j_m, \quad (18)$$

$$\rho \mathcal{D}_0 \rho^{-1} \Phi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^3 \mathcal{L}_0 \rho^{-2} \Phi_1 = -2\pi j_{m^*}, \quad (19)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \rho \rho^* \mathcal{L}_1^+ \rho^{-1} \Phi_2 - \frac{\Delta}{2} \rho^* \rho^3 \mathcal{D}_0^+ \rho^2 \Phi_1 = 2\pi j_n. \quad (20)$$

Замечательным свойством этой системы является возможность получения разделенных уравнений для величин Φ_0 и Φ_2 [9]. В самом деле, из определений (4.42) — (4.45) следует, что операторы \mathcal{D}_n и \mathcal{L}_s^+ коммутируют между собой (то же относится к парам

\mathcal{L}_n^+ , \mathcal{L}^s и т. д.); это позволяет исключить из уравнений (17) и (18) величину Φ_1 . Подействуем на правую и левую части (17) оператором

$$\sqrt{2}\rho^*\mathcal{L}_0^+\rho^{-2},$$

а на обе части уравнения (18) — оператором

$$2\rho^2\rho^*\mathcal{D}_0\rho^{-2}(\rho^*)^{-1}$$

и затем вычтем первое уравнение из второго. При этом члены, содержащие Φ_1 , взаимно уничтожатся, и мы получим уравнение для Φ_0

$$\rho(\Delta\mathcal{D}_0\rho^{-2}\mathcal{L}_1^+ + \mathcal{L}_0^+\rho^{-2}\mathcal{L}_1)\rho\Phi_0 = 2\pi i_0, \quad (21)$$

источник в правой части которого имеет вид

$$i_0 = \sqrt{2}(\mathcal{L}_0^+\rho^{-2}j_l + \sqrt{2}\mathcal{D}_0\rho^{-2}(\rho^*)^{-1}j_m). \quad (22)$$

Аналогично, действуя на обе части (19) оператором

$$\Delta\rho^4\rho^*\mathcal{D}_0\rho^{-3},$$

а на (20) — оператором $\sqrt{2}\rho^4\rho^*\mathcal{L}_0\rho^{-3}(\rho^*)^{-1}$, после сложения полученных уравнений найдем уравнение для величины Φ_2 :

$$\rho(\mathcal{L}_0\rho^{-2}\mathcal{L}_1^+ + \Delta\mathcal{D}_0^+\rho^{-2}\mathcal{D}_0)\rho^{-1}\Phi_2 = 2\pi i_2 \quad (23)$$

с источником

$$i_2 = \sqrt{2}(\mathcal{L}_0\rho^{-3}(\rho^*)^{-1}j_n + \Delta\mathcal{D}_0^+\rho^{-3}j_{m*}). \quad (24)$$

При выводе уравнений (21), (23) были использованы легко проверяемые соотношения, вытекающие из (4.39), (4.40):

$$\rho\mathcal{D}_n\rho^{-2}\mathcal{D}_n\rho = \mathcal{D}_n\mathcal{D}_n, \quad (25)$$

$$\rho\mathcal{L}_s\rho^{-2}\mathcal{L}_{s+1}\rho = \mathcal{L}_s\mathcal{L}_{s+1} \quad (26)$$

(в которых любой из операторов можно также заменить на соответствующий оператор с крестом, а ρ на ρ^*).

В области, где $j^\mu=0$, между величинами Φ_0 и Φ_2 существуют соотношения, которые можно получить, исключая Φ_1 из других пар уравнений, входящих в систему (17)–(20). Применим к (17) оператор

$$1/\sqrt{2}\rho^3\mathcal{L}_0\rho^{-2},$$

а к (19) — оператор

$$\rho^3\mathcal{D}_0\rho^{-3}.$$

Вычитая полученные уравнения, снова исключаем Φ_1 и находим соотношение между Φ_0 и Φ_2

$$1/2\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1\Phi_0=\mathcal{D}_0\mathcal{D}_0\rho^{-2}\Phi_2, \quad (27)$$

которое справедливо при отсутствии источников. Аналогичным образом, действуя на (18) оператором

$$\Delta\mathcal{D}_0+\rho^{-2}(\rho^*)^{-1},$$

а на (20) — оператором

$$\sqrt{2}\mathcal{L}_0+\rho^{-3}(\rho^*)^{-1}$$

и затем складывая полученные уравнения, с учетом (25) найдем

$$\Delta/2\mathcal{D}_0+\mathcal{D}_0+\Delta\Phi_0=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_1+\Phi_2\rho^{-2}. \quad (28)$$

Уравнения (21) и (23) допускают полное разделение переменных, и их решения можно построить с помощью функций Грина. После отыскания Φ_0 и Φ_2 третья неизвестная комплексная функция Φ_1 может быть найдена либо непосредственно из системы (17)–(20), либо с помощью потенциалов Дебая (см. ниже). Как видно из формул (17)–(20), функция Φ_1 входит всюду с множителем ρ^{-2} , причем на произведение $\rho^{-2}\Phi_1$ всюду действуют операторы дифференцирования. Поэтому ясно, что существует решение однородной системы уравнений Максвелла ($j^\mu=0$) вида

$$\Phi_1=-e\rho^2/2; \quad \Phi_2=\Phi_0=0; \quad e=\text{const}, \quad (29)$$

которое описывает собой кулоновское поле заряда e в метрике Керра. Действительно, интеграл по бесконечно удаленной сферической поверхности

$$-\oint_{r \rightarrow \infty} F^{01}r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -2 \oint_{r \rightarrow \infty} \Phi_1 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi e. \quad (30)$$

Таким образом, к решению неоднородной системы (17)–(20) можно всегда добавить кулоновское решение (29), коэффициент e в котором можно найти, вычисляя интеграл вида (30) для полного решения.

В случае метрики Шварцшильда ($a=0$), учитывая, что $\rho=-\rho^*=-r^{-1}$, из системы (17)–(20) можно получить отдельное уравнение и для функции Φ_1 . Действуя на обе части (17) оператором $\Delta/r\mathcal{D}_1+$, а на (18) — оператором $\sqrt{2}\mathcal{L}_1$, после сложения полученных уравнений найдем

$$(\Delta\mathcal{D}_1^+\mathcal{D}_0+\mathcal{L}_1\mathcal{L}_0^+)r^2\Phi_1=-2\pi i_1, \quad (31)$$

где источник в правой части имеет вид

$$i_1=r^2(\Delta\mathcal{D}_1^+j_l+\sqrt{2}\mathcal{L}_1j_m). \quad (32)$$

Переменные в этом уравнении разделяются, поскольку оператор в левой части представляет собой сумму членов, один из которых не зависит от θ , другой — от r .

Обратимся к описанию энергетических характеристик пробного электромагнитного поля в пространстве времени Керра. Выражая тензор энергии импульса

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{8\pi} (F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} + \tilde{F}_{\mu\lambda} \tilde{F}_{\nu}^{\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \mathcal{F}_{\mu\lambda} \mathcal{F}^{\lambda\nu} \end{aligned} \quad (33)$$

через самодуальный тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, записанный в форме (3), и учитывая соотношения (1.41) и (1.43), получим представление $T_{\mu\nu}$ через скаляры Ньюмена — Пенроуза

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 1/2\pi \cdot \operatorname{Re} [|\Phi_0|^2 n_{\mu} n_{\nu} + 2|\Phi_1|^2 (l_{(\mu} n_{\nu)} + m_{(\mu} \bar{m}_{\nu)}) + \\ &+ |\Phi_2|^2 l_{\mu} l_{\nu} - 4\Phi_0^* \Phi_1 n_{(\mu} \bar{m}_{\nu)} - 4\Phi_1^* \Phi_2 l_{(\mu} m_{\nu)} + 2\Phi_2 \Phi_0^* m_{\mu} m_{\nu}]. \end{aligned} \quad (34)$$

В области, где нет источников, тензор энергии-импульса удовлетворяет условию консервативности (4.12), которое, как и в случае скалярного поля, позволяет сформулировать законы сохранения энергии и проекции углового момента на направление оси симметрии метрики Керра.

Потенциалы Дебая

В работе [105] было показано, что решения уравнений Максвелла без источников в вакуумных пространствах типа \mathcal{D} могут быть построены дифференцированием функций, выполняющих роль дебаевских потенциалов. Существуют два типа таких потенциалов, причем уравнения, связывающие поля и потенциалы, а также уравнения для самих потенциалов получаются друг из друга с помощью замены $l^{\mu} \leftrightarrow n^{\mu}$, $m^{\mu} \leftrightarrow \bar{m}^{\mu}$. Попутно можно получить удобные формулы и для возмущений 4-потенциала электромагнитного поля A^{μ} . Здесь мы дадим вывод уравнений для потенциалов Дебая, отличный от [105], основывая построение на коммутативности операторов \mathcal{L}_s и \mathcal{D}_n (а также других пар такого типа из (4.34) — (4.37) между собой. Рассмотрим соотношение (27), связывающее функции Φ_0 и Φ_2 . Это соотношение можно превратить в тождество, полагая

$$\Phi_0 = 1/2 \mathcal{D}_0^2 \Xi^{\text{in}}, \quad (35)$$

$$\Phi_2 = \rho^2/4 \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1 \Xi^{\text{in}}, \quad (36)$$

где Ξ_1 — некоторая комплекснозначная функция координат. Подставим затем (35), (36) в уравнение Максвелла (17) — (20), полагая правые части равными нулю ($j^{\mu} = 0$). С помощью преобразований, основанных на использовании коммутаторов (4.39) — (4.41),

можно показать, что эта система удовлетворяется тождественно, если наряду с (35) и (36) положить

$$\Phi_1 = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \left(\mathcal{D}_0 \frac{\rho}{\rho^*} \mathcal{L}_1 + ia \sin \theta \frac{\rho}{\rho^*} (\rho + \rho^*) \mathcal{D}_0 \right) \rho^* \Xi^{\text{in}}, \quad (37)$$

и потребовать, чтобы потенциал Дебая Ξ^{in} удовлетворял уравнению

$$\left(\Delta \mathcal{D}_0^+ \mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_0^+ \mathcal{L}_1 - \frac{2}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Xi^{\text{in}} = 0. \quad (38)$$

С помощью функции Ξ^{in} можно найти также тетрадные проекции 4-потенциала \mathcal{A}_μ . Проектируя соотношение

$$2\mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{A}_{\nu,\mu} - \mathcal{A}_{\mu,\nu} = F_{\mu\nu} + i\tilde{F}_{\mu\nu} \quad (39)$$

на векторы изотропной тетрады, имеем

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \rho^* \left(\mathcal{D}_0 \rho^{*-1} \mathcal{A}_m + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_0^+ \mathcal{A}_l \right), \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \frac{\rho^*}{4\rho} \left(\mathcal{D}_0 \frac{\rho}{\rho^*} \mathcal{A}_n + \frac{\Delta}{2} \mathcal{D}_1^+ \rho^2 \mathcal{A}_l - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_1 \frac{\rho^2}{\rho^*} \mathcal{A}_m + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_1^+ \rho \mathcal{A}_m \right), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\Phi_2 = \frac{\rho^2}{4\rho^*} (\Delta \mathcal{D}_0^+ \rho^{-1} \mathcal{A}_m - \sqrt{2} \mathcal{L}_0 \Sigma \mathcal{A}_n), \quad (42)$$

где $A_l = A_\mu l^\mu$ и т. д. В рассматриваемом случае $j^\mu = 0$ на 4-потенциал можно наложить калибровочные условия, ограничивающие число отличных от нуля тетрадных проекций. Одной из допустимых является in-калибровка [98], в которой 4-потенциал является поперечным на горизонте будущего и изотропной бесконечности прошлого

$$\mathcal{A}_l^{\text{in}} = 0; \quad \mathcal{A}_m^{\text{in}} = 0. \quad (43)$$

Сопоставляя формулы (40)–(42) с (35)–(37), нетрудно установить вид отличных от нуля тетрадных проекций

$$\mathcal{A}_n^{\text{in}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho}{\rho^*} \mathcal{L}_1 \rho^* \Xi^{\text{in}}, \quad (44)$$

$$\mathcal{A}_m^{\text{in}} = \frac{1}{\rho^*} \mathcal{D}_0 \rho^* \Xi^{\text{in}}. \quad (45)$$

Аналогичное построение можно осуществить исходя из соотношения (28). Используя коммутационные соотношения (4.39)–(4.41), находим, что (28) обращается в тождество подстановкой

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \mathcal{L}_0^+ \mathcal{L}_1^+ \Xi^{\text{out}}, \quad (46)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{8} \Delta (\mathcal{D}_0^+)^2 \Delta \Xi^{\text{out}}. \quad (47)$$

Далее подставляя (46), (47) в уравнения Максвелла (17)–(20) без источников, получаем, что система тождественно удовлетворяется, если положить

$$\Phi_1 = \frac{\Delta}{4\sqrt{2}} \left(\mathcal{D}_1^+ \frac{\rho}{\rho^*} \mathcal{L}_1^+ + ia \sin \theta (\rho + \rho^*) \frac{\rho}{\rho^*} \mathcal{D}_1^+ \right) \rho^* \Xi^{\text{out}} \quad (48)$$

при условии, что потенциал Дебая Ξ^{out} подчиняется уравнению

$$\left(\mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0^+ \Delta + \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1^+ + \frac{2}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Xi^{\text{out}} = 0. \quad (49)$$

Для такого выбора потенциала Дебая (фактически две системы величин (35)–(38) и (46)–(49) связаны между собой преобразованием симметрии $l^\mu \leftrightarrow n^\mu$, $m^\mu \leftrightarrow m^{*\mu}$) естественной является калибровка 4-потенциала [98]

$$\mathcal{A}_n^{\text{out}} = 0; \quad \mathcal{A}_m^{\text{out}} = 0. \quad (50)$$

В этой калибровке A^μ является поперечным на горизонте прошлого и изотропной бесконечности будущего. Сопоставление формул (46)–(48) с (35)–(37) с учетом (50) показывает, что отличные от нуля тетрадные проекции 4-потенциала в out-калибровке имеют вид

$$\mathcal{A}_l^{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{2} \rho^{*2}} \mathcal{L}_1^+ \rho^* \Xi^{\text{out}}, \quad (51)$$

$$\mathcal{A}_{m^*}^{\text{out}} = \frac{\Delta}{2} \frac{\rho}{\rho^{*2}} \mathcal{D}_1^+ \rho^* \Xi^{\text{out}}. \quad (52)$$

Итак, потенциалы Дебая $\Xi^{\text{in,out}}$ позволяют построить решения свободных уравнений Максвелла в двух различных формах с помощью двукратного дифференцирования. При наличии источников в некоторой ограниченной области проведенными выше построениями можно воспользоваться вне этой области, а затем потребовать, чтобы найденные величины Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 были сшиты с решением в области, где $j^\mu \neq 0$, которое можно найти, воспользовавшись разделенными уравнениями (21), (23) для Φ_0 и Φ_2 . Заметим, что потенциалы (44), (45) и (51), (52) порождают самодуальный бивектор согласно (39); максвелловский тензор $F_{\mu\nu}$ определяется вещественной частью \mathcal{A}_μ .

§ 6. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Рассмотрим малые возмущения фоновой метрики Керра, которые либо создаются внешними материальными источниками, описываемыми тензором энергии импульса $T_{\mu\nu}$, либо имеют чисто волновую природу. Полный метрический тензор представим в виде

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^K + h_{\mu\nu}, \quad (1)$$

где $g_{\mu\nu}^K$ — метрика Керра, а возмущения $h_{\mu\nu}$ малы, т. е. $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. В формализме Ньюмена — Пенроуза гравитационное поле описывается набором величин, в который входят векторы изотропной тетрады, спинные коэффициенты и тетрадные проекции тензора Вейля. Возмущение тетрадных векторов l_μ^1 , n_μ^1 , m_μ^1 можно представить в виде разложения по невозмущенным векторам изотропной тетрады, при этом произвол, обусловленный возможностью малых вращений векторов тетрады (при фиксированном выборе невозмущенной тетрады), можно использовать для наложения требований

$$l_\mu^1 n^\mu = l_\mu^1 m^\mu = m_\mu^1 m^\mu = 0. \quad (2)$$

Тогда, записывая возмущения метрики в виде

$$\frac{1}{2} h_{\mu\nu} = l_{(\mu}^1 n_{\nu)} + l_{(\mu}^1 m_{\nu)}^* - m_{(\mu}^1 m_{\nu)}^* \quad (3)$$

и проектируя (3) на различные пары векторов невозмущенной тетрады, найдем [99]

$$\begin{aligned} l_\mu^1 &= \frac{1}{2} h_{ll} n_\mu, \\ n_\mu^1 &= \frac{1}{2} h_{nn} l_\mu + h_{ln} n_\mu, \end{aligned} \quad (4)$$

$$m_\mu^1 = h_{mn} l_\mu + h_{ml} n_\mu - h_{mm}^* m_\mu - \frac{1}{2} h_{mm} m_\mu^*,$$

где $h_{ll} \equiv h_{\mu\nu} l^\mu l^\nu$ и т. д. — проекции возмущений метрики на векторы невозмущенной тетрады. Дальнейших упрощений можно достичь выбором калибровки гравитационных потенциалов $h_{\mu\nu}$ (т. е. выбором системы координат). При инфинитезимальном преобразовании координат (не затрагивающем фоновой метрики)

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu(x) \quad (5)$$

величины $h_{\mu\nu}$ преобразуются по закону

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \quad (6)$$

В случае вакуумных возмущений ($T_{\mu\nu} = 0$) наложением координат

натных условий можно обратить в нуль скалярные произведения

$$h_{\mu\nu}^{(\text{in})} l^\nu = h_{\mu\nu}^{(\text{in})} m^\mu m^{*\nu} = 0 \quad (7)$$

(калибровка «падающих волн», или in-калибровка [98]). В этом случае формулы (4) дополнительно упрощаются и для возмущенных спиновых коэффициентов получаем простые выражения [99]

$$l_\mu^{(1)} = 0; \quad n_\mu^{(1)} = \frac{1}{2} h_{nr} l_\mu; \quad m_\mu^{(1)} = h_{nr} l_\mu - \frac{1}{2} h_{mm} m_\mu^*. \quad (8)$$

При этом оказывается, что возмущение коэффициента ρ , определяющего расширение и вращение пучка геодезических, при этом равно нулю, а для «сдвига» σ' при выборе в качестве невозмущенной тетрады Киннерсли имеем

$$\sigma' = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho^*} \mathcal{D}_0 \frac{\rho^*}{\rho} h_{mm}. \quad (9)$$

Другая возможная калибровка гравитационных потенциалов, описывающих вакуумные возмущения метрики Керра, соответствует равенству нулю скалярных произведений

$$h_{\mu\nu}^{(\text{out})} n^\nu = h_{\mu\nu}^{(\text{out})} m^\mu m^{*\nu} = 0 \quad (10)$$

калибровка уходящих волн, или out-калибровка [98]. Калибровки in и out оказываются удобными при рассмотрении динамических возмущений гравитационного поля Керра, причем в первом случае упрощается описание возмущений в окрестности горизонта, а во втором — на больших расстояниях от дыры. Дальнейшую задачу построения вакуумных возмущений метрики удастся упростить с помощью введения потенциалов Дебая [106].

Альтернативная схема расчетов, основанная на непосредственном интегрировании уравнений для возмущений тетрадных векторов и спиновых коэффициентов, была развита Чандрасекаром [2, 92, 109].

Метод Тьюкольского

Следуя работе [9], обратимся к отысканию возмущений тетрадных проекций тензора Вейля, связанного с тензором кривизны $R_{\mu\nu\lambda\tau}$ соотношением

$$C_{\mu\nu\lambda\tau} = R_{\mu\nu\lambda\tau} - \Phi_{\mu\lambda} g_{\nu\tau} + \Phi_{\mu\tau} g_{\nu\lambda} - \Phi_{\nu\tau} g_{\mu\lambda} + \\ + \Phi_{\nu\lambda} g_{\mu\tau} + 1/12 R (g_{\mu\lambda} g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau} g_{\nu\lambda}), \quad (11)$$

где

$$\Phi_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} \right) \quad (12)$$

бесследовая часть тензора Риччи $R_{\mu\nu}$; $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ — скалярная кривизна.

В формализме Ньюмена — Пенроуза тензор Вейля, имеющий 10 независимых компонент, описывается пятью комплексными функциями (1.49), из которых в отсутствие возмущений отлична от нуля лишь Ψ_2 (1.50). (Возмущения тетрадных проекций тензора Вейля будем обозначать малыми буквами ψ_0, \dots, ψ_4 в отличие от невозмущенной величины Ψ_2 .)

Система уравнений Ньюмена — Пенроуза, в которые входят тетрадные проекции тензора Вейля, состоит из одиннадцати тождеств Бианки (первая группа уравнений) и восемнадцати тождеств Риччи для векторов тетрады (вторая группа). Как было показано Тьюкольским [9], для функций ψ_0 и ψ_4 оказывается возможным получение разделенных уравнений, аналогичных (5.20), (5.23) в электромагнитном случае.

Для вывода уравнения, которому подчиняется возмущение ψ_0 , требуются два уравнения из первой группы (уравнения A1 и A4 в [51]), куда входят пары ψ_0, ψ_1 и возмущенные спиновые коэффициенты κ' и σ' , а также одно уравнение из второй группы (B2 в [51]), связывающее возмущения κ' и σ' с величиной ψ_0 . При использовании тетрады Киннерсли для метрики Керра первые два уравнения с помощью соотношений (4.42) — (4.45) можно привести к виду

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \rho^{-2} \mathcal{L}_2 \rho^3 \psi_0 + \rho^4 \mathcal{D}_0 \rho^{-4} \psi_1 + 3\kappa' \Psi_2 = 4\pi \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_0^+ \rho^* T_{tt} + \rho^{*2} \mathcal{D}_0 \rho^{*-2} T_{tm} \right\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{2} \rho^{-2} \rho^* \mathcal{D}_2^+ \rho^3 \psi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^* \rho^4 \mathcal{L}_{-1}^+ \rho^{-4} \psi_1 + 3\sigma' \Psi_2 = \\ = 4\pi \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^{*3} \mathcal{L}_{-1}^+ \rho^{*-2} T_{tm} + \rho^* \mathcal{D}_0 \rho^{*-1} T_{mm} \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где Ψ_2 — невозмущенное значение проекции тензора Вейля (1.50). Уравнение из второй группы для κ' и σ' принимает форму

$$\Sigma^{-1} \mathcal{D}_0 \Sigma \sigma' + 1/\sqrt{2} \Sigma^{-1} \mathcal{L}_1^+ \rho^{-1} \kappa' = \psi_0. \quad (15)$$

Для исключения ψ_1 из системы (13), (14) достаточно подействовать на (13) оператором

$$1/\sqrt{\rho}^* \rho^4 \mathcal{L}_{-1}^+ \rho^{-4},$$

а на (14) — оператором

$$\rho^* \rho^4 \mathcal{D}_0 (\rho^*)^{-1} \rho^{-4}$$

и полученные уравнения сложить. Оказывается, что при этом возникает комбинация слагаемых, содержащих возмущения спино-

вых коэффициентов \mathcal{K}' и σ' , которая в точности равна левой части (15). Заменяя эту комбинацию на ψ_0 , получаем уравнение второго порядка, не содержащее других неизвестных функций, кроме ψ_0 . Воспользовавшись соотношениями коммутации (4.39) — (4.41), приведем полученное уравнение к окончательному виду

$$[\rho^4 (\mathcal{L}_{-1}^+ \rho^{-6} \mathcal{L}_2 + \Delta \mathcal{D}_1 \rho^{-6} \mathcal{D}_2^+) \rho^3 + 6\Psi_2] \psi_0 = -4\pi T_0. \quad (16)$$

Источник в правой части (16) удобно представить в форме

$$T_0 = {}_2\tau^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (17)$$

где введен оператор проектирования

$$\begin{aligned} {}_2\tau^{\mu\nu} = & -\rho^3/\Sigma [V\sqrt{2} (\mathcal{L}_{-1}^+ \rho^{-4} \rho^{*2} \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0 \rho^{-4} \rho^{*2} \mathcal{L}_{-1}^+) \rho^{*-1} \rho l^{(\mu} m^{\nu)} + \\ & + \mathcal{L}_{-1}^+ \rho^{-4} \mathcal{L}_0^+ \rho^{*2} \rho l^{\mu} l^{\nu} + 2\mathcal{D}_0 \rho^{-4} \mathcal{D}_0 \rho m^{\mu} m^{\nu}] \Sigma \end{aligned} \quad (18)$$

(смысл индекса 2 будет ясен из дальнейшего).

Аналогичное уравнение для ψ_4 получается в результате повторения этой процедуры для системы уравнений (A.7), (A.8) и (B.10) из [51].

В наших обозначениях будем иметь

$$[\rho^4 \rho^* (\Delta \mathcal{D}_{-1}^+ \rho^{-6} \mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_{-1} \rho^{-6} \mathcal{L}_2^+) \rho^3 + 6\Psi_2] \psi_4 = -4\pi T_4, \quad (19)$$

где источник можно записать в виде

$$T_4 = {}_{-2}\tau^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (20)$$

с помощью проекционного оператора

$$\begin{aligned} {}_{-2}\tau^{\mu\nu} = & \frac{\rho^3}{\Sigma} \left[\frac{\Delta}{\sqrt{2}} (\mathcal{D}_{-1}^+ \rho^{-4} \rho^{*2} \mathcal{L}_{-1} + \mathcal{L}_{-1} \rho^{-4} \rho^{*2} \mathcal{D}_{-1}^+) \Sigma n^{(\mu} m^{*\nu)} - \right. \\ & \left. - \mathcal{L}_{-1} \rho^{-4} \mathcal{L}_0 \rho^{-1} n^{\mu} n^{\nu} - \frac{\Delta}{2} D_{-1}^+ \Delta \rho^{-4} \mathcal{D}_0^+ \rho^{-1} \rho^{*2} m^{*\mu} m^{*\nu} \right] \Sigma. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения (16) и (19) допускают полное разделение переменных (§ 7), и их решения можно построить с помощью функций Грина. Возникает вопрос: будут ли построенные величины ψ_0 и ψ_4 полностью описывать возмущения гравитационного поля? В случае произвольных невакуумных возмущений ($T_{\mu\nu} \neq 0$) для полного описания необходимо 6 вещественных независимых функций (десять компонент $h_{\mu\nu}$ минус четыре функции, фиксирующие координатные условия). Вакуумные возмущения ($T_{\mu\nu} = 0$) полностью описываются двумя независимыми функциями (2 состояния поляризации гравитационных волн). Как мы увидим ниже, две комплексные функции ψ_0 и ψ_4 связаны между собой локальным соотношением, так что фактически имеются две независимые функции. Вакуумные возмущения метрики действительно пол-

ностью описываются этими величинами (с точностью до добавок к массе и моменту вращения черной дыры) [110], точно так же, как бестоковые возмущения электромагнитного поля полностью (с точностью до изменения заряда дыры) описываются скалярами Ньюмена — Пенроуза Φ_0 и Φ_2 [111]. Широкий круг физически интересных задач требует нахождения функций, описывающих полевые возмущения вне области сосредоточения источников этих возмущений. Для этого необходимо построить решения разделенных уравнений с источниками в полной области, а затем выразить через них возмущения всех интересующих нас полевых величин вне области локализации источников. В этом смысле можно свести задачу к отысканию функций Грина, позволяющих находить возмущения метрики, создаваемые распределением материи в некоторой компактной пространственной области, всюду вне этой области. Эти возмущения будут выражены непосредственно через тензор энергии-импульса материи [98, 113]. Предварительно обсудим подробнее свойства метрических возмущений в вакуумной области.

Вакуумные возмущения метрики

Прежде всего необходимо выразить тетрадные проекции ψ_0 и ψ_4 тензора Вейля через возмущения метрики. Для этой цели удобно воспользоваться формулой [42] для вариации тензора Римана

$$\delta R_{\mu\nu\lambda\tau} = h_{[\nu\lambda;\mu];\tau} + h_{\mu[\tau;\nu;\lambda]} + 2R_{(\mu\sigma\lambda\tau}h_{\nu)}^{\sigma}, \quad (22)$$

где в правой части символом $R_{\mu\sigma\lambda\tau}$ обозначен тензор Римана невозмущенной метрики Керра. Возмущения тензора Риччи и скалярной кривизны будут при этом равны

$$\delta R_{\mu\nu} = h_{(\mu;\nu);\lambda}^{\lambda} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu;\lambda}^{\lambda} - \frac{1}{2} h_{;\mu;\nu}, \quad (23)$$

$$\delta R = h_{;\mu;\nu}^{\mu\nu} - h_{;\mu}^{\mu}, \quad (24)$$

где поднятие и опускание индексов $h_{\mu\nu}$ производится с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}^K$ фоновой метрики Керра и $h \equiv h_{\mu}^{\mu}$. Подставляя (22) — (24) в (12) и учитывая, что для метрики фона $R_{\mu\nu} = R = 0$, после проектирования на векторы невозмущенной изотропной тетрады найдем

$$\psi_0 = {}_2M^{\mu\nu}h_{\mu\nu}; \quad \rho^{-4}\psi_4 = -{}_2M^{\mu\nu}h_{\mu\nu}, \quad (25)$$

где введены операторы

$$\begin{aligned} {}_2M^{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \rho^* \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{L}_{-1}^+ \mathcal{L}_0^+ \rho^* l^{\mu} l^{\nu} + \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0 m^{\mu} m^{\nu} \rho^{*-1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{D}_0 \rho^{*2} \mathcal{L}_{-1}^+ + \mathcal{L}_{-1}^+ \rho^{*2} \mathcal{D}_0) (\rho^*)^{-2} l^{\mu} m^{\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
-{}_2M = & \frac{1}{4} \rho^* \rho^4 \left\{ \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_0 n^{\mu\nu} + \frac{\Delta}{2} \mathcal{D}_{-1}^+ \Delta \mathcal{D}_0 \rho^{*2} m^*{}^{\mu} m^{*\nu} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta \mathcal{D}_{-1}^+ \rho^{*2} \mathcal{L}_{-1} + \mathcal{L}_{-1} \Delta \rho^{*2} \mathcal{D}_{-1}^+) (\rho^*)^{-1} n^{(\mu} m^{*\nu)} \right\} \rho^{-2} \rho^{*-1}. \quad (27)
\end{aligned}$$

Эти выражения справедливы при произвольном выборе калибровки потенциалов $h_{\mu\nu}$.

Произведем теперь аналогичное разложение в уравнениях Эйнштейна (1) для полного гравитационного поля

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (28)$$

Подставляя выражения (23), (24) в (28), получим следующее линеаризованное уравнение для $h_{\mu\nu}$:

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\mu\nu\lambda\tau} h^{\lambda\tau} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (29)$$

где введен дифференциальный оператор второго порядка

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{E}}_{\mu\nu\lambda\tau} = & 1/2 [g_{(\mu\tau} \nabla_\lambda \nabla_\nu) + g_{(\mu\lambda} \nabla_\tau \nabla_\nu) - g_{\lambda\tau} \nabla_\mu \nabla_\nu - \\
& - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla_\tau) + (g_{\mu\nu} g_{\lambda\tau} - g_{(\mu\lambda} g_{\nu)\tau}) \nabla_\sigma \nabla^\sigma], \quad (30)
\end{aligned}$$

удовлетворяющий соотношениям симметрии

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\mu\nu\lambda\tau} = \widehat{\mathcal{E}}_{\nu\mu\lambda\tau} = \widehat{\mathcal{E}}_{\mu\nu\tau\lambda}. \quad (31)$$

Если подействовать на правую часть (29) операторами $\pm 2\tau^{\mu\nu}$ (18), (21), то получим источники T_0 и T_4 , входящие в разделенные уравнения (16) и (19) для величин ψ_0 и ψ_4 . В левой части уравнения (29) при этом возникают дифференциальные операторы четвертого порядка. С другой стороны, если в уравнениях (16) и (19) выразить ψ_0 и ψ_4 через $h_{\mu\nu}$ с помощью соотношений (25), то также будем иметь дифференциальные уравнения четвертого порядка. Можно предположить (и это действительно подтверждается вычислением), что возникающие дифференциальные операторы будут совпадать по крайней мере на множестве решений линеаризованных уравнений Эйнштейна в пустоте, т. е.

$$s^{\tau\mu\nu} \widehat{\mathcal{E}}_{\mu\nu\lambda\tau} = -\frac{2}{\Sigma} s \square_s M_{\lambda\tau}, \quad (32)$$

где $s = \pm 2$ и символом $s \square$ обозначены операторы

$${}_2 \square = \rho^3 (\mathcal{L}_{-1}^+ \rho^{-6} \mathcal{L}_2 + \Delta \mathcal{D}_1 \rho^{-6} \mathcal{D}_2^+) \rho^3 + 6\Sigma \Psi_2, \quad (33)$$

$$-{}_2 \square = \rho^3 (\mathcal{L}_{-1} \rho^{-6} \mathcal{L}_2^+ + \Delta \mathcal{D}_{-1}^+ \rho^{-6} \mathcal{D}_0) \rho^3 + 6\Sigma \Psi_2. \quad (34)$$

Таким образом, мы снова получаем уравнения Тьюкольского (16) и (19) для ψ_0 и ψ_4 в форме

$${}_s\Box {}_s\psi = -4\pi\Sigma {}_sT, \quad s = \pm 2, \quad (35)$$

где следует положить

$${}_2\psi \equiv \psi_0; \quad {}_{-2}\psi \equiv \rho^{-4}\psi_4; \quad {}_s\psi = {}_sM^{\mu\nu}h_{\mu\nu}. \quad (36)$$

Наша цель — отыскание возмущений метрики в терминах величин, для которых возможно получение разделенных уравнений. Возможный путь к решению этой задачи подсказывает операторное равенство (32). Чтобы выразить решение уравнения для $h_{\mu\nu}$ через решение другого уравнения для некоторой скалярной функции, достаточно перейти к сопряженному операторному равенству, определив эту операцию так, чтобы оператор гравитационных возмущений являлся самосопряженным. Покажем [112, 113], что этим свойством обладает операция сопряжения относительно скалярного произведения в пространстве симметричных тензоров с компонентами $\psi^{\mu_1 \dots \mu_n}$, принадлежащими классу функций $L^2(\mathbb{R}^4)$. Введем для двух тензоров одинакового ранга скалярное произведение согласно формуле

$$(\psi', \psi) \equiv \int \psi'^{\mu_1 \dots \mu_n} \psi_{\mu_1 \dots \mu_n} \sqrt{-g} d^4x. \quad (37)$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{M}^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_k}$, превращающий тензор ранга k $\varphi^{\nu_1 \dots \nu_k}$ в тензор того же типа ранга n , $\psi = \mathcal{M} \cdot \varphi$

$$\psi^{\mu_1 \dots \mu_n} = \mathcal{M}^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_k} \varphi^{\nu_1 \dots \nu_k}. \quad (38)$$

Оператором \mathcal{M}^\star , сопряженным к \mathcal{M} в смысле скалярного произведения (37), назовем оператор, задаваемый соотношением

$$(\mathcal{M}^\star \psi, \varphi) = (\psi, \mathcal{M} \varphi), \quad (39)$$

или, в компонентной форме,

$$\begin{aligned} \int (\mathcal{M}^{\star}_{\nu_1 \dots \nu_k}{}^{\mu_1 \dots \mu_n} \psi_{\mu_1 \dots \mu_n})^* \varphi^{\nu_1 \dots \nu_k} \sqrt{-g} d^4x = \\ = \int \psi^{\mu_1 \dots \mu_n} \mathcal{M}^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_k} \varphi^{\nu_1 \dots \nu_k} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (40)$$

Очевидно, что для двух операторов \mathcal{N} и \mathcal{M} , таких, что определена их композиция $\mathcal{N} \cdot \mathcal{M}$, т. е.

$$\mathcal{N}^{\lambda_1 \dots \lambda_l}_{\mu_1 \dots \mu_l} \mathcal{M}^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_k}$$

(«выходная» валентность \mathcal{M} и «входная» валентность \mathcal{N} , очевидно, для этого должны совпадать), операция сопряжения произведения приводит к произведению сопряженных операторов в обратном порядке

$$(\mathcal{N} \cdot \mathcal{M})^\star = \mathcal{M}^\star \cdot \mathcal{N}^\star. \quad (41)$$

Простейший оператор умножения на комплексное число при операции сопряжения переходит в комплексно-сопряженный, т. е. $z^\star = z^*$. Оператор ковариантного дифференцирования является антисамосопряженным $\nabla_\mu^\star = -\nabla_\mu$, поскольку

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi^\star (\nabla_\mu A^\mu) \sqrt{-g} d^4x &= \int_{\Omega} \varphi^\star (V \sqrt{-g} A^\mu)_{,\mu} d^4x = \\ &= \oint_{\partial\Omega} \varphi^\star A^\mu \sqrt{-g} dS_\mu - \int_{\Omega} (\nabla_\mu \varphi^\star) A^\mu \sqrt{-g} d^4x \end{aligned} \quad (42)$$

(интеграл по граничной поверхности исчезает для рассматриваемого класса функций). Аналогичным образом нетрудно установить правила сопряжения для операторов (4.34) — (4.37):

$$\mathcal{L}_s^\star = -\frac{1}{\Sigma} \mathcal{L}_{1-s}^\star \Sigma, \quad (43)$$

$$\mathcal{L}_n^\star = -\frac{1}{\Sigma} \mathcal{L}_{-n}^\star \Sigma. \quad (44)$$

С помощью повторного интегрирования по частям можно показать, что оператор $\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\tau}$ (вещественный) при сопряжении переходит в аналогичный оператор с переставленными индексами

$$\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\tau}^\star = \mathcal{E}_{\lambda\tau\mu\nu}. \quad (45)$$

Это соотношение и является основным элементом схемы построения возмущений метрики $h_{\mu\nu}$. Применим операцию \star к операторному равенству (32). Учитывая (41) и (45), будем иметь

$$\mathcal{E}_{\lambda\tau\mu\nu} \tau^{\star\mu\nu} = -2_s M_{\lambda\tau s}^\star \square \star \frac{1}{\Sigma}. \quad (46)$$

Введем в рассмотрение комплекснозначные функции $_s \Xi(x)$, подчиняющиеся уравнению

$$_s \square \star \frac{1}{\Sigma} - _s \Xi = 0. \quad (47)$$

Можно утверждать, что если $_s \Xi$ — решение уравнения (47), то величина

$$_s h_{\mu\nu} \equiv _s \tau_{\mu\nu}^\star - _s \Xi \quad (48)$$

удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{E}_{\lambda\tau\mu\nu} h^{\mu\nu} = 0, \quad (49)$$

т. е. линеаризованным уравнениям Эйнштейна (29) при $T_{\mu\nu} = 0$. Действительно, сказанное непосредственно вытекает из оператор-

ного равенства (46) применительно к функции ${}_s\Xi$, удовлетворяющей (47).

Покажем теперь, что оператор Тьюкольского ${}_s\Box$ при сопряжении переходит в оператор

$${}_s\Box^\star = \Sigma^{-1} - {}_s\Box^\star \Sigma. \quad (50)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно применить операцию * к (33), (34), учитывая правила сопряжения (41), (43), (44), и сравнить полученный результат с (50). Таким образом, оператор ${}_s\Box^\star$ фактически не является новым и уравнение (6.47) можно записать с помощью операторов Тьюкольского (33), (34), используя комплексное сопряжение

$${}_s\Box {}_s\Xi^* = 0. \quad (51)$$

Итак, имея решение однородного уравнения Тьюкольского, можно построить решение линеаризованных уравнений Эйнштейна (49) в виде (48). Величины ${}_s\Xi$, таким образом, играют роль потенциалов Дебая для возмущений метрики. Альтернативное построение потенциалов Дебая для гравитационных возмущений было дано в работе [106]. Два значения $s = \pm 2$ в (48) соответствуют двум различным калибровкам гравитационных возмущений $h_{\mu\nu}$.

Получаемые с помощью соотношения (48) величины ${}_{\pm 2}h_{\mu\nu}$ комплексны, однако в силу вещественности оператора $\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\tau}$ действительная и мнимая части (48) удовлетворяют в отдельности линеаризованным уравнениям Эйнштейна без источников. Можно показать, что действительная и мнимая части (48) описывают четные и нечетные относительно пространственных отражений возмущения метрики. Введем оператор пространственной инверсии I , действие которого на некоторую функцию f от координат выражается равенством

$$If(t, r, \theta, \varphi) = f(t, r, \pi - \theta, \varphi + \pi). \quad (52)$$

Метрика Керра является четной относительно пространственных отражений, т. е.

$$I g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} I. \quad (53)$$

Нетрудно установить следующие правила коммутации оператора I с векторами невозмущенной тетрады Киннерсли:

$$[I, l^\mu] = [I, n^\mu] = 0; \quad (54)$$

$$I m^\mu = -m^{*\mu} I, \quad (55)$$

а также соотношения коммутации I с операторами \mathcal{D}_n , \mathcal{L}_s

$$[I \mathcal{D}_n] = 0; \quad (56)$$

$$I \mathcal{L}_s = -\mathcal{L}_s I \quad (57)$$

и, наконец,

$$I\rho = \rho^* I. \quad (58)$$

Используя эти правила, находим

$$I_s \square^* = ({}_s \square^*)^* I, \quad (59)$$

и поэтому решение уравнения (47) можно выбрать так, что при инверсии координат оно перейдет в комплексно-сопряженное

$$I_s \Xi = (-1)^s {}_s \Xi^*. \quad (60)$$

Кроме того,

$$I_s \tau^{\star} = (-1)^s ({}_s \tau^{\star})^* I \quad (61)$$

и, следовательно,

$$I_s h_{\mu\nu} = ({}_s \tau_{\mu\nu}^{\star} - {}_s \Xi)^*. \quad (62)$$

Таким образом, вещественная и мнимая части комплексных потенциалов

$${}_s h_{\mu\nu}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} ({}_s \tau_{\mu\nu}^{\star} - {}_s \Xi^{(\pm)} \pm ({}_s \tau_{\mu\nu}^{\star} - {}_s \Xi^{(\pm)})^*) \quad (63)$$

определяют четные и нечетные возмущения метрики (множитель $(-1)^s$ введен в (60) для унификации с описанием электромагнитных возмущений).

Явные выражения для операторов ${}_s \tau_{\mu\nu}^{\star}$ получаются с помощью (43), (44)

$$\begin{aligned} {}_2 \tau_{\mu\nu}^{\star} = & -[l_{\mu} l_{\nu} \rho^* \rho^2 \mathcal{L}_1 (\rho^*)^{-4} \mathcal{L}_2 + 2m_{\mu}^* m_{\nu}^* \rho^* \mathcal{D}_0 (\rho^*)^{-4} \mathcal{D}_0 + \\ & + V\sqrt{2} l_{(\mu} m_{\nu)} \rho^* \rho^{-1} (\mathcal{L}_2 \rho^2 (\rho^*)^{-4} \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0 \rho^2 (\rho^*)^{-4} \mathcal{L}_2)] \rho^{*3}, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} -{}_2 \tau_{\mu\nu}^{\star} = & [-n_{\mu} n_{\nu} (\rho^*)^{-1} \mathcal{L}_1^{\dagger} (\rho^*)^{-4} \mathcal{L}_2^{\dagger} - m_{\mu} m_{\nu} (\rho^*)^{-1} \rho^2 \mathcal{D}_0^{\dagger} (\rho^*)^{-4} \mathcal{D}_0^{\dagger} \Delta^2/4 + \\ & + n_{(\mu} m_{\nu)} \Sigma (\mathcal{L}_1^{\dagger} \rho^2 (\rho^*)^{-4} \mathcal{L}_2^{\dagger} + \mathcal{L}_2^{\dagger} \rho^2 (\rho^*)^{-4} \mathcal{D}_1^{\dagger}) \Delta/V\sqrt{2}] \rho^{*3}. \end{aligned} \quad (65)$$

Они дают возмущения метрики в in-калибровке при $s=2$ и out-калибровке при $s=-2$.

Соотношение между ψ_0 и ψ_4

В силу калибровочной инвариантности тетрадных проекций тензора Вейля подстановка ${}_s h_{\mu\nu}$ в (24) должна давать одинаковые результаты. Это условие, с одной стороны, налагает связь на потенциалы Дебая ${}_{\pm 2} \Xi$, а с другой — позволяет получить соотношение между ψ_0 и ψ_4 , аналогичное соотношению (5.27) для электромагнитного поля. При выводе этого соотношения следует иметь в виду, что в формулы (25) необходимо подставлять физические (вещественные) возмущения метрики, а не комплексные потен-

циалы. Это можно сделать с помощью разбиения на четную и нечетную части

$${}_s\psi^{(\pm)} = {}_sM^{\mu\nu} {}_{s'}h_{\mu\nu}^{(\pm)}, \quad |s| = |s'| = 2. \quad (66)$$

Если в этом соотношении, куда могут входить различные комбинации s и s' , приравнять правые части при фиксированном s и различных s' , то получим соотношение между потенциалами Дебая ${}_{\pm 2}\Xi$. Если же в нем зафиксировать s' , получим величины ${}_{\pm 2}\psi$, выраженные через один потенциал Дебая, что и дает искомое соотношение.

Подстановка (63) в (66) приводит к сверткам операторов ${}_sM^{\mu\nu}$ с ${}_s\tau_{\mu\nu}^{\star}$ и ${}_s\tau_{\mu\nu}^{\star\star}$ при различных сочетаниях $s = \pm 2$ и $s' = \pm 2$. Учитывая явные формулы для этих операторов (26), (27), (64), (65) и правила коммутации (4.39)–(4.42), можно доказать соотношения [113]

$${}_2M^{\mu\nu} {}_2\tau_{\mu\nu}^{\star} = \mathcal{D}_0^4, \quad {}_{-2}M^{\mu\nu} {}_2\tau_{\mu\nu}^{\star} = \frac{1}{4} \mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2, \\ {}_2M^{\mu\nu} {}_{-2}\tau_{\mu\nu}^{\star} = \frac{1}{4} \mathcal{L}_{-1}^+\mathcal{L}_0^+\mathcal{L}_1^+\mathcal{L}_2^+, \quad {}_{-2}M^{\mu\nu} {}_{-2}\tau_{\mu\nu}^{\star} = \frac{\Delta^2}{16} \mathcal{D}_0^{+4}\Delta^2, \quad (67)$$

а также установить обращение в нуль диагональных комбинаций

$${}_2M^{\mu\nu} {}_{-2}\tau_{\mu\nu}^{\star\star} = 0, \quad {}_{-2}M^{\mu\nu} {}_{-2}\tau_{\mu\nu}^{\star\star} = 0. \quad (68)$$

Преобразование двух оставшихся комбинаций операторов значительно сложнее. Для наших целей, однако, достаточно рассматривать операторы на множестве решений уравнений для потенциалов Дебая и использовать эти уравнения для понижения порядка операторов. В результате громоздких вычислений получаем

$${}_{\pm 2}M^{\mu\nu} {}_{\mp 2}\tau_{\mu\nu}^{\star} {}_{\pm 2}\Xi^* = \pm 3\Psi_2 \rho^{-3} \partial_{\neq} {}_{\pm 2}\Xi^*, \quad (69)$$

где Ψ_2 — невозмущенное значение проекции тензора Вейля. С помощью (67)–(69) и с учетом коммутативности операторов \mathcal{D}_n и \mathcal{L}_s находим два соотношения между ψ_0 и ψ_4 :

$$\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\psi_0 - 4\mathcal{D}_0^4\rho^{-4}\psi_4 = 12\rho^{-3}\Psi_2\partial_{\neq}\psi_0^* \quad (70)$$

и

$$\mathcal{L}_{-1}^+\mathcal{L}_0^+\mathcal{L}_1^+\mathcal{L}_2^+(\rho^{-4}\psi_4) - \frac{1}{4}\Delta^2\mathcal{D}_0^{+4}\Delta^2\psi_0 = -12\rho^{-7}\Psi_2\partial_{\neq}\psi_4^*. \quad (71)$$

Эти соотношения справедливы в вакуумной области (где $T_{\mu\nu} = 0$). В отличие от их электромагнитного аналога (5.27), (5.28) они не являются линейными, так как содержат антилинейные члены в правых частях. Приведем также выражения для проекций тензо-

ра Вейля четных возмущений через потенциал Дебая:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \frac{1}{2} \mathcal{D}_0^4 \Xi, \\ \psi_4 &= \frac{1}{8} \rho^4 \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \Xi - \frac{3}{2} \Psi_2 \rho \partial_t \Xi. \end{aligned} \quad (72)$$

Потенциалы Дебая для $s = \pm 1$

Аналогичный метод применим и к электромагнитным возмущениям. Исходя из уравнений Максвелла, записанных через вещественный 4-потенциал

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} A^\nu = 4\pi j_\mu, \quad (73)$$

где оператор

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \nabla_\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu, \quad (74)$$

и используя проекционные операторы ${}_s\tau^\mu$ ($s = \pm 1$), дающие источники в уравнениях Тьюкольского (5.21), (5.23),

$${}_0i = {}_1\tau^\mu j_\mu, \quad {}_2i = -{}_1\tau^\mu j_\mu, \quad (75)$$

получим уравнения

$${}_s\tau_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu} A_\nu = 4\pi {}_s\tau_\mu j^\mu. \quad (76)$$

Явный вид операторов ${}_s\tau_\mu$ вытекает из соотношений (5.22), (5.24):

$${}_1\tau_\mu = \frac{\rho}{\Sigma} \left(\mathcal{D}_0 m_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_0^+ \rho^* l_\mu \right) \frac{\Sigma}{\rho}, \quad (77)$$

$$-{}_1\tau_\mu = \frac{\rho}{\Sigma} \left(\frac{\Delta}{2} \mathcal{D}_0^+ m_\mu^* \rho^* - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_0 n_\mu \right) \frac{\Sigma}{\rho^2}. \quad (78)$$

Далее строим операторы ${}_sM_\mu$, выражающие тетрадные проекции максвелловского тензора через вещественный 4-потенциал,

$${}_s\psi = {}_sM_\mu A^\mu, \quad \Phi_0 = {}_1\psi, \quad \Phi_2 = \rho^{-2} {}_1\psi, \quad (79)$$

проектируя равенство $F_{\mu\nu} = 2A_{[\mu;\nu]}$ на векторы изотропной тетрады

$${}_1M_\mu = \rho^* \left(\mathcal{D}_0 (\rho^*)^{-1} m_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_0^+ l_\mu \right), \quad (80)$$

$$-{}_1M_\mu = \frac{1}{2} \rho^* (\Delta \mathcal{D}_0^+ \rho m_\mu^* - \sqrt{2} \mathcal{L}_0 \Sigma n_\mu). \quad (81)$$

Переставляя операторы в левой части (76), выделяем справа вектор, после чего слева остается скалярный оператор второго порядка [113]

$${}_s\tau^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu} = -\frac{1}{\Sigma} {}_s\Box {}_sM_\nu, \quad (82)$$

где в явном виде

$${}_1\Box = \rho (\Delta \mathcal{D}_1 \rho^{-2} \mathcal{D}_1^+ + \mathcal{L}_0^+ \rho^{-2} \mathcal{L}_1) \rho, \quad (83)$$

$$-{}_1\Box = \rho (\Delta \mathcal{D}_0^+ \rho^{-2} \mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_0 \rho^{-2} \mathcal{L}_1^+) \rho. \quad (84)$$

Таким образом, из уравнений Максвелла для A^μ (73) мы снова получаем уравнение Тьюкольского. Применим теперь к операторному тождеству (82) операцию сопряжения *. С помощью интегрирования по частям нетрудно убедиться в том, что у оператора $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ при этом изменяется порядок индексов:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\star = \mathcal{M}_{\nu\mu} \quad (85)$$

(заметим что оператор $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ симметричен по индексам лишь на множестве скаляров). С учетом этого равенство (82) в результате сопряжения приобретает вид

$$\mathcal{M}_{\nu\mu} s \tau^{\star\mu} = {}_s M_\nu^\star s \Box^\star \Sigma, \quad (86)$$

и, следовательно, для любого решения ${}_s \Xi$ уравнения (47) с $s = \pm 1$ комплексный 4-вектор

$${}_s \mathcal{M}^\mu = {}_s \tau^{\star\mu} {}_s \Xi \quad (87)$$

будет удовлетворять уравнению (73) при $j^\mu = 0$. (Уравнения (5.38), (5.39) для потенциалов Дебая в in и out-калибровках совпадают с (47) при $s = 1, 2$ соответственно.) Явные выражения для операторов ${}_s \tau_\mu^\star$ таковы:

$${}_1 \tau_\mu^\star = -(\rho^*)^{-1} \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} l_\mu \mathcal{L}_1 + m_\mu^* \mathcal{D}_0 \right) \rho^*; \quad (88)$$

$$-{}_1 \tau_\mu^\star = \frac{1}{2} (\rho^*)^{-2} (\sqrt{2} n_\mu \mathcal{L}_1^+ - \rho^{-1} m_\mu \mathcal{D}_0^+) \rho^*. \quad (89)$$

Вещественная и мнимая части комплексного вектора (87) дают четные и нечетные возмущения поля при условии, что потенциал Дебая удовлетворяет соотношению (60). Формулы (5.35), (5.36), (5.51), (5.52), выражающие Φ_0 и Φ_2 через потенциалы Дебая, а также перекрестные соотношения (5.27), (5.28) получают подстановкой вещественной и мнимой частей (87) в выражения для соответствующих полевых функций при учете легко проверяемых соотношений

$$\begin{aligned} {}_1 M^\mu {}_1 \tau_\mu^\star &= \mathcal{D}_0^2; \quad {}_1 M^\mu -{}_1 \tau_\mu^\star = \frac{1}{2} \mathcal{L}_0^+ \mathcal{L}_1^+; \\ -{}_1 M^\mu {}_1 \tau_\mu^\star &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1; \quad -{}_1 M^\mu -{}_1 \tau_\mu^\star = \frac{1}{4} \Delta \mathcal{L}_0^{+2}. \end{aligned} \quad (90)$$

Все аналогичные свертки ${}_s M^\mu$ с комплексно сопряженным оператором ${}_s \tau_\mu^{\star\star}$ тождественно обращаются в нуль, что отличает случай электромагнитных возмущений от гравитационных.

§ 7. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Уравнение Тьюкольского

Операторы ${}_s \square$, входящие в уравнения (6.93), (6.94) для электромагнитных и (6.33), (6.34) для гравитационных возмущений поля Керра с учетом коммутаторов (4.39)–(4.41) и явного вида Ψ_2 (1.50), принимают вид

$${}_s \square = \mathcal{D}_0 \Delta^{1-s} \mathcal{D}_0^+ \Delta^s + \mathcal{L}_{1-s}^+ \mathcal{L}_s + 2(2s-1)(\rho^*)^{-1} \partial_t, \quad s > 0; \quad (1)$$

$${}_s \square = \Delta^{-s} \mathcal{D}_0^+ \Delta^{1+s} \mathcal{D}_0^+ + \mathcal{L}_{1+s} \mathcal{L}_s^+ + 2(2s+1)(\rho^*)^{-1} \partial_t, \quad s < 0. \quad (2)$$

Если ввести вместо оператора Даламбера для безмассового скалярного поля оператор

$${}_0 \square = -\Sigma \nabla^\mu \nabla_\mu = \frac{1}{2} (\mathcal{D}_0 \Delta \mathcal{D}_0^+ + \mathcal{D}_0^+ \Delta \mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_1^+ \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^+), \quad (3)$$

то всю совокупность волновых уравнений для возмущений поля Керра безмассовыми полями различного спина сведем к единому уравнению

$${}_s \square {}_s \psi = -4\pi \Sigma_s T, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \quad (4)$$

где ${}_0 \psi \equiv \psi$ — скалярное поле,

$${}_1 \psi \equiv \Phi_0, \quad {}_{-1} \psi \equiv \rho^{-2} \Phi_2, \quad {}_2 \psi \equiv \psi_0, \quad {}_{-2} \psi \equiv \rho^{-4} \psi_4 \quad (5)$$

и источники имеют вид

$${}_0 T = T_\mu^\mu, \quad {}_{\pm 1} T = \pm {}_1 \tau^\mu j_\mu, \quad {}_{\pm 2} T = \pm {}_2 \tau^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Подставляя явные выражения для операторов (4.34)–(4.37), получим уравнение, построенное впервые Тьюкольским [9] для $|s| = 0, 1, 2, 1/2$:

$$\begin{aligned} -{}_s \square {}_s \psi = & \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial_s^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{4aMr}{\Delta} \frac{\partial_s^2 \psi}{\partial t \partial \varphi} + \\ & + \left(\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial_s^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial_s \psi}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial_s \psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[\frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial_s \psi}{\partial \varphi} - \\ & - 2s \left(\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right) \frac{\partial_s \psi}{\partial t} + (s^2 \operatorname{ctg}^2 \theta - s) {}_s \psi = 4\pi \Sigma_s T \quad (7) \end{aligned}$$

(позже была доказана его справедливость и для безмассового гравитино, $|s|=3/2$). Замечательным свойством этого уравнения является возможность полного разделения переменных; помимо рассматриваемой системы координат, это можно сделать и в любой другой системе, связанной с координатами Бойера — Линдквиста преобразованиями $t' = t + f_1(r) + f_2(\theta)$, $\varphi' = \varphi + g_1(r) + g_2(\theta)$; $r' = h(r)$; $\theta' = q(\theta)$, где f_1 , t_2 , g_1 , g_2 ; h и q — произвольные функции [9].

Возможность разделения переменных связана с существованием трех независимых операторов, коммутирующих с ${}_s\Box$, именно $E = i\partial/\partial t$, $L = -i\partial/\partial\varphi$, а также оператора

$$K_s = \begin{cases} \mathcal{L}_1^+ \mathcal{L}_s + (2s-1) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*} \right) \hat{E}, & s > 0; \\ \frac{1}{2} (\mathcal{L}_1^+ \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^+), & s = 0; \\ \mathcal{L}_{1+s} \mathcal{L}_{-s}^+ + (2s+1) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*} \right) \hat{E}, & s < 0; \end{cases} \quad (8)$$

обобщающего K_0 (4.51) на случай $s \neq 0$.

Выделяя собственные функции операторов E и L , будем иметь набор мод

$${}_s\psi(t, r, \theta, \varphi) = {}_s\psi_m^\omega(r, \theta) e^{-i\omega t + im\varphi}. \quad (9)$$

На множестве решений вида (9) операторы (4.34), (4.37) принимают форму

$$\mathcal{D}_n = \frac{\partial}{\partial r} + 2n \frac{r-M}{\Delta} - \frac{i\mathcal{K}}{\Delta}; \quad \mathcal{D}_n^+ = \mathcal{D}_n^*, \quad (10)$$

$$\mathcal{L}_s = \frac{\partial}{\partial\theta} + s \operatorname{ctg} \theta + \frac{m - \gamma \sin^2 \theta}{\sin \theta},$$

$$\mathcal{L}_s^+ = \frac{\partial}{\partial\theta} + s \operatorname{ctg} \theta - \frac{m - \gamma \sin^2 \theta}{\sin \theta}, \quad (11)$$

где $\mathcal{K} = \omega(a^2 + r^2) - ma$, $\gamma = a\omega$. Подставляя (11) в (8) и сравнивая с уравнением (Д.1) Дополнения, нетрудно убедиться в том, что сужение оператора (8) на множество мод (9) имеет в качестве собственных функций (для всех s) спинорные сфероидальные функции

$$K_s {}_sS_{lm}^\gamma(\cos \theta) = -{}_s\lambda_{lm\gamma} {}_sS_{lm}^\gamma(\cos \theta), \quad (12)$$

где ${}_s\lambda_{lm\gamma}$ — собственное значение нумерованное парой целых (в случае целых s) чисел $l \geq |s|$, $|m| \leq l$. В случае $\gamma = 0$

$${}_s\lambda_{lm0} = (l-s)(l+s+1), \quad (13)$$

причем, очевидно, $-s\lambda_{lm0} = s\lambda_{lm0} + 2s$. Это соотношение выполняется и при $\gamma \neq 0$, так как замена s на $-s$ при одновременном преобразовании $\theta \rightarrow \pi - \theta$ и $\lambda \rightarrow \lambda + 2s$ не меняет уравнения (12)

$$-s\lambda_{lm\gamma} = s\lambda_{lm\gamma} + 2s. \quad (14)$$

(Подробнее свойства спиновых сферонидальных функций и соответствующих собственных значений обсуждаются в Дополнении.)

Вводя спиновые сферонидальные гармоники

$${}_sZ_{lm}^{\gamma}(\theta, \varphi) = 1/\sqrt{2\pi} {}_sS_{lm}^{\gamma}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (15)$$

образующие полную ортонормированную систему функций на единичной сфере при $l \geq |s|$, $|m| \leq l$, получаем набор мод, характеризуемых тремя индексами $\{\omega, l, m\}$:

$${}_s\Psi_{lm\omega} = {}_sR_{lm\omega}(r) {}_sZ_{lm}^{\gamma}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (16)$$

где ${}_sR_{lm}^{\omega}(r)$ — радиальные функции. На множестве мод (16) оператор Тьюкольского ${}_s\Box$ сводится к следующему радиальному оператору:

$${}_s\Box {}_s\Psi_{lm\omega} = ({}_s\mathcal{H}_{m\omega} - s\lambda_{lm\gamma}) {}_s\Psi_{lm\omega}, \quad (17)$$

где оператор

$${}_s\mathcal{H}_{m\omega} = \Delta^{-s} \frac{d}{dr} \Delta^{s+1} \frac{d}{dr} + \frac{\mathcal{K}}{\Delta} (\mathcal{K} - is\Delta') + 4i\omega rs \quad (18)$$

(штрихом здесь и далее будет обозначаться производная по r $\Delta' = d\Delta/dr$).

Аналогичным образом построим сужение семейства операторов K_s на множество функций (9)

$$K_s(m, \omega) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{(m + s \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \\ + \gamma \cos \theta (\gamma \cos \theta - 2s) + s(s-1) - \gamma^2 + 2m\gamma, \quad (19)$$

которое обладает свойством $K_s(m, \omega) + s = K_{-s}(-m, \omega) - s$, что совместно с (14) дает

$${}_s\lambda_{lm\gamma} = {}_s\lambda_{l-m-\gamma}. \quad (20)$$

Для радиального оператора (18) замена $s \rightarrow -s$ эквивалентна комплексному сопряжению плюс преобразование первого слагаемого

$$-{}_s\mathcal{H}_{m\omega}^* - {}_s\lambda_{lm\gamma} = \Delta^s ({}_s\mathcal{H}_{m\omega} - {}_s\lambda_{lm\gamma}) \Delta^{-s}. \quad (21)$$

Поэтому если ${}_sR_{lm\omega}(r)$ — собственная функция оператора (17) с нулевым собственным значением

$$({}_s\mathcal{H}_{m\omega} - {}_s\lambda_{lm\gamma}) {}_sR_{lm\omega}(r) = 0, \quad (22)$$

то собственной функцией будет также $\Delta^{-s} {}_s R_{lm\omega}^*$:

$$({}_s \mathcal{H}_{m\omega} - {}_s \lambda_{lm\gamma}) \Delta^{-s} {}_s R_{lm\omega}^* = 0. \quad (23)$$

При замене $\{m, \omega\}$ на $\{-m, -\omega\}$, $\mathcal{H} \rightarrow -\mathcal{H}$ и, следовательно,

$${}_s \mathcal{H}_{-m-\omega} = {}_s \mathcal{H}_{m\omega}^*. \quad (24)$$

Учитывая (20), а также вещественность ${}_s \lambda_{lm\gamma}$, имеем

$${}_s \mathcal{H}_{m\omega}^* - {}_s \lambda_{lm\omega} = {}_s \mathcal{H}_{-m-\omega} - {}_s \lambda_{l-m-\omega}, \quad (25)$$

откуда следует, что наряду с ${}_s R_{lm\omega}$ собственной функцией (22) будет

$$({}_s \mathcal{H}_{m\omega} - {}_s \lambda_{lm\omega}) {}_s R_{l-m-\omega} = 0. \quad (26)$$

Симметрия $s \leftrightarrow -s$

Оператор, комплексно-сопряженный оператору Тьюкольского, очевидно, будет иметь в качестве собственных функций, принадлежащих нулевому собственному значению, функции, комплексно-сопряженные к (16), либо (заменяя $m \rightarrow -m$, $\omega \rightarrow -\omega$ с учетом (Д.21) и (26)) вид произведения $-{}_s Z_{lm}^* {}_s R_{lm\omega}$. Поэтому потенциалы Дебая, удовлетворяющие уравнению (6.51) в результате разделения переменных представляются в виде разложения по модам вида

$${}_s \Xi_{lm\omega}^p(x) = {}_s \mathcal{R}_{lm\omega p}^p(r) {}_s Z_{lm}^p(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (27)$$

где ${}_s \mathcal{R}_{lm\omega p}$ — некоторое решение уравнения (22). Индекс $p = \pm$ соответствует четности возмущения. Условимся нормировать радиальные функции так, чтобы

$${}_s \mathcal{R}_{l-m-\omega p}^* = (-1)^{m+l} {}_s \mathcal{R}_{lm\omega p}, \quad (28)$$

тогда в силу соотношения (Д.21) для угловых функций имеем

$${}_s \Xi_{l-m-\omega}^{p*} = (-1)^{l+s} {}_s \mathcal{R}_{lm\omega p}(r) {}_s Z_{lm}^p(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (29)$$

Заметим, что при инверсии координат

$$\hat{I} {}_s \Xi_{lm\omega}^p = (-1)^s {}_s \Xi_{l-m-\omega}^{p*}, \quad (30)$$

поэтому полные потенциалы Дебая, удовлетворяющие дополнительному условию (6.60), должны иметь следующее разложение по модам:

$${}_s \Xi^p(x) = \sum_{l,m,\omega} {}_s \Xi_{lm\omega}^p(x), \quad (31)$$

где символом суммы обозначена операция

$$\sum_{l, m, \omega} \equiv \sum_{\substack{l > |s| \\ |m| \leq l}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega. \quad (32)$$

Введем далее комплексные моды вакуумных возмущений метрики

$${}_s h_{\mu\nu}(l m \omega; x) \equiv {}_s \tau_{\mu\nu}^{\star} - {}_s \Xi_{lm\omega}^p(x) \quad (33)$$

и электромагнитного 4-потенциала

$${}_s A_{\mu}(l m \omega; x) \equiv {}_s \tau_{\mu}^{\star} - {}_s \Xi_{lm\omega}^p(x), \quad (34)$$

или, в безындексной форме,

$${}_s \pi(l m \omega; x) = {}_s \tau^{\star} - {}_s \Xi_{lm\omega}^p(x), \quad (35)$$

где ${}_s \pi_{\mu} = {}_s A_{\mu}$ при $s = \pm 1$, ${}_s \pi_{\mu\nu} = {}_s h_{\mu\nu}$ при $s = \pm 2$ (аналогично для ${}_s \tau$), ${}_0 \tau^{\star}$ следует считать равным единице. В силу построения величины ${}_s \pi$ являются комплексными решениями вакуумных уравнений Эйнштейна при $s = \pm 2$ (в линейном приближении) уравнений Максвелла без источников (при $s = \pm 1$) и свободного уравнения Даламбера при $s = 0$. Вещественные решения с определенной четностью получаются взятием действительной и мнимой частей потенциалов (6.43) и (6.87) для $s = \pm 2$ и $s = \pm 1$ соответственно. Обозначая символом ${}_s \mathbf{M}$ оператор ${}_s M_{\mu\nu}$ при $s = \pm 2$ (см. (6.26) и (6.27) и оператор ${}_s M_{\mu}$ при $s = \pm 1$ (см. (6.80) и (6.81)) и используя точку для обозначения операции свертывания по индексам, например ${}_1 \mathbf{M} \cdot {}_1 \pi \equiv {}_1 M_{\mu} \pi^{\mu}$, можем записать выражения для ${}_s \psi$ в общем виде:

$${}_s \psi^p(x) = \frac{1}{2} \sum_{lm\omega} i^{\frac{p-|p|}{2}} {}_s \mathbf{M} \cdot ({}_s \pi(l m \omega; x) + p {}_s \pi^{\star}(l m \omega; x)), \quad |s| = |s'|, \quad (36)$$

где фазовый множитель учитывает появление мнимой единицы при взятии мнимой части ($p = -1$).

Покажем, что угловая часть выражения под знаком суммы в (36) действительно сводится к спиновым сфероидальным функциям независимо от выбора s и s' . Для «диагонального» случая $s' = s = \pm 2$ в (36) это следует непосредственно из определения (27) и операторных соотношений (6.67), (6.68).

$${}_2 \psi^p(x) = \frac{1}{2} \sum_{lm\omega} i^{\frac{p-|p|}{2}} \mathcal{D}_{0-2}^4 \mathcal{R}_{lm\omega}^p(r) {}_2 Z_{lm}^p(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (37)$$

$$-{}_2\Psi^p(x) = \frac{1}{32} \sum_{lm\omega} i^{\frac{p-|p|}{2}} \Delta^2 (\mathcal{D}_0^+)^4 \Delta^2 {}_2\mathcal{R}_{lm\omega}^p(r) - {}_2Z_{lm}^y(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (38)$$

Для «недиагональных» выражений $s = -s' = \pm 2$ имеются вклады от второго слагаемого в (36), и для приведения к однородной форме необходимо воспользоваться соотношениями (28) для радиальных функций и (Д.21) для угловых. Воспользовавшись операторными равенствами (6.70) и формулами (Д.22), (Д.23) для угловых функций с противоположными s , получим

$${}_2\Psi^p(x) = \frac{1}{8} \sum_{lm\omega} i^{\frac{p-|p|}{2}} C_{lm\omega}^p {}_2\mathcal{R}_{lm\omega}^p(r) {}_2Z_{lm}^y(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (39)$$

$$-{}_2\Psi^p(x) = \frac{1}{8} \sum_{lm\omega} i^{\frac{p-|p|}{2}} C_{lm\omega}^{p*} {}_2\mathcal{R}_{lm\omega}^p(r) - {}_2Z_{lm}^y(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (40)$$

где введена постоянная

$$C_{lm\omega}^p = {}_2C_{lm}^y + p(-1)^l 12i\omega M \quad (41)$$

(${}_2C$ — коэффициент в формулах, связывающих ${}_{\pm s}Z$ между собой (Д.26)). Сравнивая разложения (37) с (39) и (38) с (40), находим связь между радиальными функциями с противоположными значениями индекса

$$\mathcal{D}_0^4 - {}_2\mathcal{R}_{lm\omega p} = \frac{1}{4} C_{lm\omega}^p {}_2\mathcal{R}_{lm\omega p}, \quad (42)$$

$$\Delta^2 (\mathcal{D}_0^+)^4 \Delta^2 {}_2\mathcal{R}_{lm\omega p} = 4C_{lm\omega}^{p*} - {}_2\mathcal{R}_{lm\omega p}. \quad (43)$$

Эти соотношения аналогичны полученным в [89, 109]. Можно показать, что последние вытекают из (42), (43) при определенном выборе линейной комбинации решений (38) и (37) с различной четностью. Положим

$${}_2R_{lm\omega} = {}_2\mathcal{R}_{lm\omega(+)} + {}_2\mathcal{R}_{lm\omega(-)}, \quad (44)$$

$$-{}_2R_{lm\omega} = \frac{C_{lm\omega}^{(+)}}{C} - {}_2\mathcal{R}_{lm\omega(+)} + \frac{C^*}{C_{lm\omega}^{(-)}} - {}_2\mathcal{R}_{lm\omega(-)}, \quad (45)$$

где величина C совпадает с введенной в [89]:

$$C = {}_2C + 12i\omega M. \quad (46)$$

Учитывая легко проверяемое соотношение

$$\frac{C_{lm\omega}^{(-)}}{C} = \frac{C^*}{C_{lm\omega}^{(+)}} \quad (47)$$

из формул (42) и (43) имеем

$$\mathcal{D}_0^4 - {}_2R_{lm\omega} = \frac{C}{4} {}_2R_{lm\omega}, \quad (48)$$

$$\Delta^2 (\mathcal{D}_0^+)^4 \Delta {}_2R_{lm\omega} = 4C^* {}_2R_{lm\omega}. \quad (49)$$

Следует отметить, что эти соотношения между радиальными функциями относятся к возмущениям метрики, не имеющим определенной четности. Существует другая пара комбинаций решений с определенными p , для которой выполняются соотношения (48) и (49) с заменой $C \leftrightarrow C^*$. Это вытекает из инвариантности пропорции (47) относительно такой замены.

Случай электромагнитных возмущений ($s = \pm 1$) проще, поскольку соотношение между ${}_1\psi$ и ${}_{-1}\psi$ является линейным и не содержит комплексно-сопряженных величин. Подставляя (34) в (36) и учитывая операторные тождества (6.90), найдем для диагонального случая $s = s' = \pm 1$:

$${}_1\psi^p(x) = \frac{1}{2} \sum_{lm\omega} i^{\frac{p-|p|}{2}} \mathcal{D}_0^2 - {}_1\mathcal{R}_{lm\omega p}(r) {}_1Z_{lm}^y(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (50)$$

$${}_{-1}\psi^p(x) = \frac{1}{8} \sum_{lm\omega} i^{\frac{p-|p|}{2}} \Delta (\mathcal{D}_0^+)^2 \Delta {}_1\mathcal{R}_{lm\omega p}(x) {}_{-1}Z_{lm}^y(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (51)$$

Недиагональные выражения (36) с $s = -s' = \pm 1$ также не содержат вклада от второго (комплексно-сопряженного) слагаемого в (36), и с помощью формул (Д.22), (Д.23) находим

$${}_1\psi^p(x) = \frac{1}{4} \sum_{lm\omega} i^{\frac{p-|p|}{2}} {}_1C_{lm}^y \mathcal{R}_{lm\omega p}(r) {}_1Z_{lm}^y(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (52)$$

$${}_{-1}\psi^p(p) = \frac{1}{4} \sum_{lm\omega} i^{\frac{p-|p|}{2}} {}_1C_{lm}^y - {}_1\mathcal{R}_{lm\omega p}(r) {}_{-1}Z_{lm}^y(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (53)$$

Из сопоставления (50) с (52) и (51) с (53) получаем

$$\mathcal{D}_0^2 - {}_1\mathcal{R}_{lm\omega p} = \frac{{}_1C_{lm}^y}{2} {}_1\mathcal{R}_{lm\omega p}, \quad (54)$$

$$\Delta (\mathcal{D}_0^+)^2 \Delta {}_1\mathcal{R}_{lm\omega p} = 2 {}_1C_{lm}^y - {}_1\mathcal{R}_{lm\omega p}, \quad (55)$$

куда в отличие от (42), (43) входят одинаковые константы пропорциональности ${}_1C_{lm}^y$, являющиеся вещественными (см. (Д.25)). Поэтому стандартные соотношения [89, 109] между радиальными функциями, входящими в разложения Φ_0 и Φ_2 , совпадают с (54)

и (55) и выполняются для мод определенной четности в отдельности. Это неудивительно, поскольку соотношения (54), (55) следуют непосредственно из формул (5.27) и (5.28), линейно связывающих Φ_0 и Φ_2 между собой.

Решения однородного радиального уравнения

Обратимся к построению решений однородного уравнения для радиальных функций (22). Переходя к черепаший координате r^* и новой функции

$${}_s\chi_{lm\omega} = (r^2 + a^2)^{1/2} \Delta^{s/2} {}_sR_{lm\omega}, \quad (56)$$

получим уравнение

$$\frac{d_s^2 {}_s\chi_{lm\omega}}{dr^{*2}} + {}_sV(r) {}_s\chi_{lm\omega} = 0, \quad (57)$$

где «эффективный потенциал» равен

$${}_sV(r) = [\mathcal{K}(\mathcal{K} - 2is(r-M)) + \Delta(4i\omega sr - {}_s\lambda_{lm}^{\omega})](r^2 + a^2)^{-2} - G^2 - dG/dr^*, \quad (58)$$

$$G = \frac{r\Delta}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{s(r-M)}{r^2 + a^2}.$$

В случае $s=0$ выражение (58) является вещественным и совпадает с (4.67). При $s \neq 0$ функция ${}_sV$ комплекснозначна, что сказывается, в частности, и на асимптотическом поведении решений. В асимптотических областях $r^* \rightarrow \pm\infty$ функция ${}_sV(r)$ имеет вид

$${}_sV(r) = \begin{cases} \omega(\omega + 2is/r), & r^* \rightarrow \infty, \\ k_s^2, & r^* \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (59)$$

$$(60)$$

где через k_s обозначена величина

$$k_s = k - \frac{is(r_+ - M)}{2Mr_+}. \quad (61)$$

Поскольку при $r^* \rightarrow \infty$ черепаший координата совпадает с r , из уравнения (57) с потенциалом (59) следует, что существуют линейно-независимые решения, имеющие асимптотический вид

$${}_su^{(\pm)}(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} r^{\mp s} e^{\pm i\omega r}, \quad (62)$$

т. е. представляют собой расходящиеся (${}_su^{(+)}$) и сходящиеся (${}_su^{(-)}$) волны с растущей или убывающей амплитудой.

Вблизи горизонта, т. е. при $r^* \rightarrow -\infty$, решения уравнения (57) с потенциалом (60), очевидно, можно записать как

$${}_sv^{(\pm)}(r) \underset{r \rightarrow r_+}{\sim} e^{\pm ik_s r^*}. \quad (63)$$

Учитывая, что величина k_s при $s \neq 0$ комплексна, и принимая во внимание соотношение

$$\ln \Delta \approx \frac{r_+ - M}{Mr_+} (r^* + \text{const}), \quad (64)$$

справедливое в окрестности горизонта (const определяется выбором постоянной интегрирования при переходе к координате r^*), можно переписать (63) в виде

$${}_sv^{(\pm)}(r) \underset{r \rightarrow r_+}{\propto} \Delta^{\pm s/2} e^{\pm ikr^*}. \quad (65)$$

Из анализа, проведенного в § 4, ясно, что эти решения следует рассматривать как расходящиеся (${}_sv^{(+)}$) и сходящиеся (${}_sv^{(-)}$) волны, амплитуда которых стремится к нулю либо расходится при $r \rightarrow r_+$.

Аналогично функциям χ^{up} (4.75) и χ^{in} (4.77) можно ввести функции ${}_s\chi^{\text{up}}$ и ${}_s\chi^{\text{in}}$, первая из которых при $r \rightarrow \infty$ представляет расходящуюся волну, а вблизи горизонта — суперпозицию выходящей и входящей волн

$${}_s\chi^{\text{up}} = \delta_s (2|\omega|)^{-1/2} {}_s\mu^{(+)} = \delta_s (2|k|)^{-1/2} (\mu_s {}_sv^{(+)} + \nu_s {}_sv^{(-)}) \varepsilon(k\omega), \quad (66)$$

а вторая — падающую на черную дыру волну при $r \rightarrow r_+$

$${}_s\chi^{\text{in}} = \gamma_s (2|k|)^{-1/2} \tau_s {}_sv^{(-)} = \gamma_s (2|\omega|)^{1/2} ({}_s\mu^{(-)} + \sigma_s {}_s\mu^{(+)}), \quad (67)$$

где $\delta_s, \gamma_s, \mu_s, \nu_s, \tau_s, \sigma_s$ — некоторые комплексные коэффициенты (не путать со спиновыми коэффициентами!). Эффективный потенциал (58) при комплексном сопряжении переходит в

$${}_sV^* = -{}_sV, \quad (68)$$

поэтому наряду с (66) и (67) решениями радиального уравнения будут $-{}_s\chi^{\text{up}*}$ и $-{}_s\chi^{\text{in}*}$. Приравнявая асимптотические значения вронскиана $W(-{}_s\chi^{\text{in}*}, {}_s\chi^{\text{up}})$, находим соотношение между коэффициентами в (66) и (67)

$$\nu_s = -\frac{k}{k_s} \frac{\sigma_{-s}^*}{\tau_{-s}^*}. \quad (69)$$

Аналогично использование вронскиана $W({}_s\chi^{\text{in}}, {}_s\chi^{\text{up}})$ дает

$$\mu_s = \frac{k}{k_s} \frac{1}{\tau_s}. \quad (70)$$

Наконец, с помощью вронскиана $W(-{}_s\chi^{\text{in}*}, {}_s\chi^{\text{in}})$ получим соотношение

$$\sigma_s \sigma_{-s}^* + \varepsilon(k\omega) \frac{k_s}{k} \tau_s \tau_{-s}^* = 1, \quad (71)$$

обобщающее (4.79) на случай $s \neq 0$. Заметим, что наличие знакового множителя перед вторым слагаемым выражает эффект сверхизлучения для всех s (ср. (4.79)).

Построим теперь потенциалы Дебая, отвечающие решениям однородного уравнения типа in и up . Соответствующие радиальные функции с противоположными значениями s должны быть связаны между собой соотношениями (42) и (43) при $s = \pm 2$ и (54), (55) при $s = \pm 1$. В результате подстановки (56) применительно к функциям ${}_s\mathcal{R}_{lm\omega p}$ получим набор решений $\chi_{lm\omega p}^{\text{in, up}}$, а также комплексно-сопряженных, которые обозначим вслед за Хржановским и Мизнером [94] как

$${}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{down}} = (-{}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{up}})^*; \quad {}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{out}} = (-{}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{in}})^*. \quad (72)$$

Для этих решений между коэффициентами σ_s , τ_s с противоположными значениями s имеются соотношения, вытекающие из формул (42), (43), (54) и (55), применительно к асимптотикам функций ${}_s\chi_{lm\omega p}$. Предварительно заметим, что в асимптотических областях операторы \mathcal{D}_0 и \mathcal{D}_0^+ имеют вид

$$\mathcal{D}_0 = (\mathcal{D}_0^+)^* = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} - i\omega, & r^* \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (73)$$

$$\begin{cases} \frac{2Mr_+}{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial r^*} - ik \right), & r^* \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (74)$$

Действуя оператором (73) на асимптотики функций $u^{(\pm)}$ (62), найдем с учетом главных членов

$$\mathcal{D}_0^{2|s|} {}_s u^{(-)} = (2i\omega)^{2|s|} {}_s u^{(-)}, \quad (75)$$

в то время как величина $\mathcal{D}_0 {}_s u^{(+)}$ более высокого порядка малости при $r \rightarrow \infty$. Аналогично

$$(\mathcal{D}_0^+)^{2|s|} {}_s u^{(+)} = (2i\omega)^{2|s|} {}_s u^{(+)}, \quad (76)$$

тогда как величина $\mathcal{D}_0 {}_s u^{(-)}$ мала.

В области вблизи горизонта предварительно следует умножить функции ${}_s v^{(\pm)}$ на $\Delta^{s/2}$ (см. (56)), представив Δ с помощью соотношения (64). Применяя к асимптотическим выражениям (63) оператор (74), найдем, что при $r \rightarrow r_+$

$$\mathcal{D}_0^{2s} \Delta^s e^{-ikr^*} = q_s \Delta^{-s} e^{-ikr^*}, \quad (77)$$

$$(\mathcal{D}_0^+)^{2s} \Delta^s e^{ikr^*} = q_s^* \Delta^{-s} e^{ikr^*}, \quad s = 1, 2, \quad (78)$$

в то время как величины $\mathcal{D}_0^{2s} \Delta^s e^{ikr^*}$ и $(\mathcal{D}_0^+)^{2s} \Delta^s e^{-ikr^*}$ при $r \rightarrow r_+$ малы. В формулах (77), (78) величины q_s равны

$$q_2 = (4Mr_+)^4 k_1 k k_{-1} k_{-2},$$

$$q_1 = -(4Mr_+)^2 k_1 k \quad (79)$$

(отметим, что $k_s^* = k_{-s}$). Применяя соотношения (42), (43), (54) и (55) к радиальным функциям ${}_s\mathcal{R}_{lm\omega}$, соответствующим решениям in и out (66), (67), с учетом сказанного получим следующие соотношения между коэффициентами:

$$\gamma_{-s} = Q_{|s|}^s 2^{-3s} \omega^{-2s} \gamma_s, \quad (80)$$

$$\delta_{-s} = Q_{|s|}^{*-s} 2^s \omega^{2s} \delta_s, \quad (81)$$

$$\sigma_{-s} = (2\omega)^{4s} |Q_{|s|}|^{-2s} \sigma_s, \quad (82)$$

$$\tau_{-|s|} = (-1)^s \frac{(2\omega)^{2s}}{q_{|s|}} \tau_{|s|}, \quad (83)$$

где введено обозначение $Q_{|s|}$ для величин

$$Q_0 = 1; Q_1 = -{}_1C_{lm\omega}; Q_2 = (C_{lm\omega}^p)^{1/2}. \quad (84)$$

Специализированные таким образом коэффициенты в выражениях для мод (66), (67), (6.72) определяют согласованные выражения для радиальных частей потенциалов Дебая (27) в обеих калибровках in ($s > 0$) и out ($s < 0$). Возмущения метрики могут быть найдены с помощью формулы (33) в любой из калибровок, при этом соответствующие полевые функции ${}_s\psi$ одинаковы, как это и должно быть в силу калибровочной инвариантности максвелловского тензора и тетрадных проекций ψ_0, ψ_4 тензора Вейля.

Возмущения при наличии источников

Перейдем к построению возмущений скалярного и электромагнитного полей и метрики пространства-времени при наличии внешних источников. Если для полного описания вакуумных (бестоковых) возмущений достаточно построить потенциалы Дебая, с помощью которых легко восстанавливаются как потенциалы ($A^\mu, h_{\mu\nu}$), так и полевые величины ${}_s\psi$, то при наличии источников полное решение уже нельзя построить таким образом, что очевидно уже из подсчета степеней свободы поля (с. 69).

Однако если источники сосредоточены в компактной области пространства, то удастся отыскать возмущения, генерируемые источниками вне этой области, т. е. там, где возмущения по-прежнему являются вакуумными (бестоковыми).

Исходя из неоднородного уравнения Тьюкольского (4), можно построить уравнение для радиальной части потенциалов Дебая с источниками. Для этого достаточно воспользоваться «недиагональными» формулами (39), (40), (52), (53) для величин ${}_s\psi$, выражающими их непосредственно через радиальные части соответствующих потенциалов Дебая. Подставляя (39) и (40) в (4) и записывая источник ${}_sT$ в виде аналогичного разложения

$${}_sT = \sum_{lm\omega p} {}_sT_{lm\omega p}(r) {}_sZ_{lm}^\gamma e^{-i\omega t}, \quad (85)$$

для радиальных функций ${}_{\pm 2}\mathcal{R}_{lm\omega p}$ имеем уравнение

$$({}_{\pm 2}\mathcal{H}_{m\omega} \pm {}_{\pm 2}\lambda_{lm\gamma}) {}_{\pm 2}\mathcal{R}_{lm\omega p} = -32\pi\Sigma i^{\frac{|p|-p}{2}} \left((C_{lm\omega}^p)^{-1} \right) {}_{\pm 2}T_{lm\omega p}. \quad (86)$$

Аналогичное уравнение для случая электромагнитных возмущений получим в результате подстановки разложений (52), (53) в (4)

$$({}_{\pm 1}\mathcal{H}_{m\omega} - {}_{\pm 1}\lambda_{lm\gamma}) {}_{\pm 1}\mathcal{R}_{lm\omega p} = -16\pi\Sigma i^{\frac{|p|-p}{2}} ({}_1C_{lm}^\gamma)^{-1} {}_{\pm 1}T_{lm\omega p}. \quad (87)$$

Величины ${}_sT_{lm\omega p}(r)$ отвечают разложению проекций источников с определенной четностью

$$\begin{aligned} &{}_sT_{lm\omega p}(r) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \oint \sin\theta d\theta d\varphi {}_sZ_{lm}^*(\theta, \varphi) e^{i\omega t} \left(\begin{smallmatrix} s\tau_{\mu\nu} \\ s\tau_{\mu} \end{smallmatrix} \right) \frac{1+p(-1)^s \hat{I}}{2} \left(\begin{smallmatrix} T^{\mu\nu} \\ j_{\mu} \end{smallmatrix} \right), \end{aligned} \quad (88)$$

где \hat{I} — оператор инверсии (множитель $(-1)^s$ добавлен в соответствии с (6.61)). Для получения полного потенциала Дебая возмущения с данной четностью необходимо просуммировать по индексам $lm\omega$. В случае скалярного поля уравнение аналогичного вида непосредственно определяет четные и нечетные возмущения поля (мы сохраним обозначения, принятые для потенциалов Дебая при $s \neq 0$, и для $s=0$):

$$({}_0\mathcal{H}_{m\omega} - {}_0\lambda_{lm\gamma}) {}_0\mathcal{R}_{lm\omega p} = -4\pi\Sigma {}_0T_{lm\omega p}. \quad (89)$$

Переходя к функции ${}_s\chi_{lm\omega p}$, согласно (56) и черепашьей координате r^* запишем (86), (87) и (89) в единой форме

$$\frac{d_s^2 \chi_{lm\omega p}}{dr^{*2}} + {}_sV {}_s\chi_{lm\omega p} = {}_s\dot{j}_{lm\omega p}, \quad (90)$$

где источник получается умножением правых частей (86), (87) и (89) на величину

$$\Delta^{1+s/2} (r^2 + a^2)^{-3/2}. \quad (91)$$

Решение уравнения (90) строится методом вариации постоянных с помощью двух независимых решений однородного уравнения с подходящими граничными условиями. Физическое (запаздывающее) решение уравнения Тьюкольского получим, если выберем в качестве таких решений χ^{in} и χ^{up} (66) и (67), первое из которых

регулярно на горизонте, а второе — на пространственной бесконечности

$$\begin{aligned} {}_s\chi_{lm\omega p} = W_s^{-1} & \left[{}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{up}}(r) \int_{r_+}^r {}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{in}}(r') {}_sj_{lm\omega p}(r') dr'^* + \right. \\ & \left. + {}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{in}}(r) \int_r^{\infty} {}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{up}}(r') {}_sj_{lm\omega p}(r') dr'^* \right], \end{aligned} \quad (92)$$

где W_s — вронскиан:

$$W_s = {}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{in}} \frac{d}{dr^*} {}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{up}} - {}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{up}} \frac{d}{dr^*} {}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{in}}. \quad (93)$$

Подставляя сюда явные выражения для решений in и up, получим

$$W_s = i \frac{\omega}{|\omega|} \delta_s \gamma_s. \quad (94)$$

Произведение постоянных $\delta_s \gamma_s$ остается пока неопределенным, и конкретный выбор можно сделать так, чтобы получить более простое выражение для функций Грина в терминах потенциалов. Заметим, что, хотя формула (92) справедлива всюду, включая и область локализации источника ${}_sT$, нельзя утверждать, что потенциалы Дебая с радиальной функцией (92) будут давать правильные выражения для возмущений метрики и 4-потенциала электромагнитного поля всюду. Однако если функции ${}_sT_{lm\omega p}(r)$ имеют компактный носитель, например

$$\text{supp}({}_sT_{lm\omega p}(r)) \subset [r_1, r_2] \quad \forall l, m, \omega, p, \quad (95)$$

где $r_+ < r_1 < r_2$, то в областях $r < r_1$ и $r > r_2$ с помощью (92) можно восстановить полностью искомые возмущения потенциалов $h_{\mu\nu}$, A_μ , поскольку в этих областях возмущения подчиняются уравнениям без источников. Для этой цели удобно построить так называемые факторизованные функции Грина [113], идея которых восходит к работам [94, 98].

Факторизованные функции Грина

Прежде всего необходимо выразить потенциалы Дебая, отвечающие решениям (92) в терминах «неспроектированных» источников $T_{\mu\nu}$ и j_μ . Будем предполагать, что эти функции локализованы в компактной пространственной области (95). Тогда вместо (92) можно написать решения вне этой области в виде

$$\begin{aligned} {}_s\chi_{lm\omega p} = W^{-1} & \int_{r_+}^{\infty} [{}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{up}}(r) {}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{in}}(r') \theta(r - r_2) + \\ & + {}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{in}}(r) {}_s\chi_{lm\omega p}^{\text{up}}(r') \theta(r_1 - r)] {}_sj_{lm\omega p}(r') \frac{r'^2 + a^2}{\Delta(r')} dr'. \end{aligned} \quad (96)$$

Далее подставляем источники, стоящие в правых частях (81), (87) с учетом фактора (91), и используем явное выражение для $sT_{lm\omega p}$. Затем вместо $s\chi_{lm\omega p}^{\text{in}}(r')$ и $s\chi_{lm\omega p}^{\text{up}}$ вводим согласно (72) $-s\chi_{lm\omega p}^{\text{out}*}(r')$ и $-s\chi_{lm\omega p}^{\text{down}*}$, после чего возвращаемся к исходным радиальным функциям с учетом соотношения (56). В результате в области $r > r_2$, например, имеем

$$\begin{aligned} \pm_2 \mathcal{R}_{lm\omega p} = & -16W_{\pm 2}^{-1} i^{\frac{|p|-p}{2}} \left(\frac{1/C_{lm\omega}^p}{1/C_{lm\omega}^*} \right) \pm_2 \mathcal{R}_{lm\omega p}^{\text{up}} \times \\ & \times \int (\mp_2 \mathcal{R}_{lm\omega p}^{\text{out}} \pm_2 Z_{lm}^{\gamma} e^{-i\omega t})^* \pm_2 \tau_{\mu\nu} \frac{1+p\hat{l}}{2} T^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \pm_1 \mathcal{R}_{lm\omega p} = & -8W_{\pm 1}^{-1} i^{\frac{|p|-p}{2}} ({}_1C_{lm}^{\gamma}) \pm_1 \mathcal{R}_{lm\omega p}^{\text{up}} \times \\ & \times \int (\mp_1 \mathcal{R}_{lm\omega p}^{\text{out}} \pm_1 Z_{lm}^{\gamma} e^{-i\omega t})^* \pm_1 \tau_{\mu} \frac{1-p\hat{l}}{2} j^{\mu} \sqrt{-g} d^4x, \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} {}_0 \mathcal{R}_{lm\omega p} = & -2W_0^{-1} i^{\frac{|p|-p}{2}} {}_0 \mathcal{R}_{lm\omega p}^{\text{up}} \times \\ & \times \int ({}_0 \mathcal{R}_{lm\omega p}^{\text{out}} {}_0 Z_{lm}^{\gamma} e^{-i\omega t})^* \frac{1+p\hat{l}}{2} T_{\mu}^{\mu} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (99)$$

Интегралы в этих выражениях имеют вид скалярных произведений (6.37). Используя определение сопряженных операторов (6.39), можем переписать эти интегралы в виде

$$\left(\begin{pmatrix} s\tau_{\mu\nu}^{\star} \\ s\tau_{\mu}^{\star} \end{pmatrix} - {}_s \mathcal{R}_{lm\omega p}^{\text{out}} {}_s Z_{lm}^{\gamma} e^{-i\omega t}, \frac{1+p(-1)^s}{2} \begin{pmatrix} T^{\mu\nu} \\ j^{\mu} \end{pmatrix} \right). \quad (100)$$

Левый сомножитель в этом скалярном произведении, как можно убедиться, сравнивая с (27) и (35), представляет собой возмущение потенциалов моды $(l, \omega, m, p, \text{out})$, и (100) можно в безындексной форме записать как

$$\begin{aligned} \left({}_s \pi^{\text{out}}(lm\omega p; x) \cdot \frac{1+p(-1)^s l}{2} {}_s \mathbf{J} \right) &= (\hat{P}_s \pi^{\text{out}}(lm\omega p, x) \cdot {}_s \mathbf{J}), \\ \hat{P} &= \frac{1+p l}{2}; \end{aligned} \quad (101)$$

где величина ${}_s \mathbf{J}$ имеет компоненты $\pm_2 J^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}$; $\pm_1 J^{\mu} = j^{\mu}$; ${}_0 J = T_{\mu}^{\mu}$ и учтено соотношение (6.61).

Заметим, что потенциалы $\pm_s \pi$ отличаются между собой калибровочным преобразованием, т. е.

$${}_1A_\mu = -{}_1A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x^\mu},$$

$${}_1h_{\mu\nu} = -{}_1h_{\mu\nu} + \Phi_{\mu;\nu} + \Phi_{\nu;\mu}, \quad (102)$$

где f и Φ — некоторые скалярные функции. Учитывая законы сохранения для источников

$$J^\mu_{;\mu} = 0; \quad T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (103)$$

нетрудно доказать обращение в нуль интегралов

$$\int f_{;\mu} J^\mu \sqrt{-g} d^4x = 0; \quad \int \Phi_{\mu;\nu} T^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad (104)$$

при сделанных предположениях относительно компактности источников (а также гипотезы об их адиабатическом «выключении» при $t \rightarrow \pm \infty$). Это означает, что скалярные произведения (100) с точностью до нормировки радиальных функций не должны зависеть от знака s . Для согласования нормировки заметим, что функции ${}_{\pm s}\mathcal{R}_{lm\omega}^{\text{up}}$, $({}_{\pm s}\mathcal{R}_{lm\omega}^{\text{in}})$ удовлетворяют соотношениям (42), (43), (54), (55), которым должны подчиняться и левые части (97), (98). «Лишними множителями» в (97), (98) являются обратные вронскианы $W_{\pm s}^{-1}$, поэтому должно выполняться равенство

$$W_{-s}({}_s\pi^{\text{out (down)}}(lm\omega, x), {}_sJ) = W_s(-{}_s\pi^{\text{out (down)}}(lm\omega, x), {}_sJ) \quad (105)$$

или с учетом (97) и (80), (81)

$$({}_s\pi^{\text{out (down)}}(lm\omega, x), {}_sJ) = \left(\frac{Q_{|s|}}{4Q_{|s|}^*} \right)^s (-{}_s\pi^{\text{out (down)}}(lm\omega, x), {}_sJ). \quad (106)$$

Необходимо также убедиться в том, что построенные функции ${}_{\pm s}\mathcal{R}_{lm\omega}$ (97)–(99) удовлетворяют соотношениям симметрии (28) при условии, если (28) имеет место для мод in, up. Это действительно следует из соотношений (Д.21) для угловых функций, формулы (6.59) и предположения, что коэффициенты γ_s и δ_s обладают свойством

$$\gamma_s^*(-m, -\omega)\delta_s^*(-m, -\omega) = \gamma_s(m, \omega)\delta_s(m, \omega). \quad (107)$$

Функции (97)–(99) по построению удовлетворяют уравнениям Тьюкольского в терминах «диагональных» разложений (39), (40) с соответствующими источниками. Далее, в силу (106) и выполнения равенств (42), (43), (54), (55) для in и out решений будут справедливы и «недиагональные» разложения (37), (38). Следовательно, в областях, где плотность источников обращается в нуль, найденные решения полностью описывают возмущения метрики и электромагнитного поля. Далее с помощью радиальных функций (97), (99) строим моды ${}_s\mathcal{E}_{lm\omega}^{\text{up}}$ (27) и затем с помощью (35) находим возмущения потенциалов ${}_s\pi^{\text{up}}$. Аналогичные рассуждения

можно проделать для области $r < r_1$, в этом случае получим скалярное произведение (101) для down-моды и потенциал Дебая для in-моды. После этого следует построить вещественные возмущения, суммируя выражения типа

$$\frac{1}{2} i^{\frac{p-|p|}{2}} ({}_s\pi(lm\omega; x) + p_s \pi^*(lm\omega; x)) \quad (108)$$

по индексам l, m, ω, p .

Оставшийся произвол в выборе нормировочных постоянных γ_s и δ_s можно использовать для упрощения записи. Формулы (80), (81) связывают между собой значения вронскианов (97) с противоположными s . Поэтому доопределение постоянных γ_s и δ_s в радиальных функциях не удастся выполнить так, чтобы уничтожить все численные коэффициенты в (97)–(99). Можно, однако, в согласии с (80), (81) фиксировать эти постоянные так, чтобы получить простое выражение для факторизованных функций Грина. К этой цели приводит выбор

$$\begin{aligned} \gamma_s &= 2^{(3|s|+3s-1)/2} \omega^s Q_{|s|}^{\frac{-s+|s|}{2}} e^{i\varphi_s}, \\ \delta_s &= 2^{(3|s|-s-1)/2} \omega^s (Q_{|s|}^*)^{\frac{s-|s|}{2}} e^{-i\varphi_s}, \end{aligned} \quad (109)$$

где φ_s — некоторая фаза, назначение которой — обеспечить выполнение соотношений между радиальными функциями (28).

Подставляя в (108) радиальные функции (97)–(99) и заменяя в (101) $s \rightarrow -s$ (что возможно в силу доказанного выше), получим при выборе постоянных (109) следующее выражение для полевых возмущений вне области локализации источника:

$$\begin{aligned} {}_s\pi(x) &= \sum_{\omega l m p} \frac{1}{2} i^{\frac{p-|p|}{2}} ({}_s\pi(lm\omega; x) + p_s \pi^*(lm\omega; x)) = \\ &= \int {}_sG^{\text{ret}}(x, x') {}_sJ(x') \sqrt{-g(x')} d^4x'. \end{aligned} \quad (110)$$

В это выражение входит запаздывающая функция Грина

$$\begin{aligned} {}_sG^{\text{ret}}(x, x') &= \sum_{\omega l m p} \frac{i\omega}{|\omega|} 2^{\frac{2-s-|s|+s^2}{2}} [(\hat{P}_s \pi^{\text{in}}(lm\omega; x) \otimes \\ &\otimes (\hat{P}_s \pi^{\text{down}*}(lm\omega; x)) \theta(r-r') + \\ &+ (\hat{P}_s \pi^{\text{up}}(lm\omega; x)) \otimes (\hat{P}_s \pi^{\text{out}*}(lm\omega; x')) \theta(r'-r)], \end{aligned} \quad (111)$$

где \hat{P} — проекционный оператор, введенный в (101), величины

${}_s\pi^{\text{in}}(lm\omega\rho; x)$ и др. определяются формулой (35), в которую следует подставить радиальные функции (67), (66), (72) соответствующего типа. При выводе формулы (111) были использованы соотношения (6.60) и (6.61), связывающие комплексно-сопряженные потенциалы Дебая с величинами, возникающими при инверсии координат. Функция Грина является скаляром для $s=0$, тензором второго ранга ${}_sG_{\mu\nu}^{\text{ret}}$ для $s=\pm 1$ и тензором четвертого ранга ${}_sG_{\mu\nu\lambda\tau}^{\text{ret}}$ для $s=\pm 2$. Мы построили ее таким образом, что вне области локализации источника решения (110) для электромагнитных ${}_sA_\mu = {}_s\pi_\mu(x)$ ($s=\pm 1$) и гравитационных ${}_sh_{\mu\nu} = {}_s\pi_{\mu\nu}(x)$ ($s=\pm 2$) возмущений приводят к правильным значениям для калибровочно инвариантных тетрадных проекций тензоров Максвелла и Вейля

$${}_s\psi(x) = {}_s\mathbf{M} \cdot {}_s\pi(x), \quad |s| = |s'|, \quad (112)$$

при любых комбинациях, равных по абсолютной величине s и s' . В свою очередь, функции ${}_s\psi$ однозначно (с точностью до изменения параметров массы, момента вращения и заряда черной дыры) определяют возмущения в области вне локализации источников [110].

Выражение для функций Грина (111) внешне не отличается от полученного в работе [98], однако имеется отличие в структуре величин ${}_s\pi(lm\omega\rho; x)$; входящие в них радиальные функции различны для разных ρ . Факторизованные функции Грина, построенные в [98], были проверены лишь для более простого случая диагональных проекций (112) при $s=s'$. Полученные в § 6 формулы (6.69) позволяют провести проверку и для $s=-s'$, при этом оказывается, что найденное выше выражение (111) действительно удовлетворяет требованию независимости результатов для ${}_s\psi$ от выбора калибровки.

Покажем, что функции Грина (111) являются вещественными. Для этого достаточно воспользоваться соотношениями (28), (30) и (57), выражающими действие инверсии на парциальные моды:

$$I_s\pi(lm\omega\rho; x) = {}_s\pi^*(l-m-\omega\rho; x), \quad (113)$$

а также учесть, что при замене $m \rightarrow -m$, $\omega \rightarrow -\omega$ под знаком суммы в (111) множитель перед фигурной скобкой переходит в комплексно-сопряженный. Прделав необходимые переобозначения индексов, находим

$${}_sG^{\text{ret}}(x, x') = {}_sG^{\text{ret}*}(x, x'). \quad (114)$$

Поскольку опережающие функции Грина получаются из запаздывающих в результате перестановки аргументов и комплексного сопряжения, из (114) следует, что

$${}_sG^{\text{adv}}(x, x') = {}_sG^{\text{ret}}(x', x). \quad (115)$$

Заметим, что соотношение (109) не фиксирует нормировки радиальных функций, входящих в (111). Доопределение коэффициентов не сказывается на функциях Грина, однако нужно иметь в виду, что должны выполняться соотношения (28) и (107), справедливость которых предполагалась при выводе формулы (111).

Преобразование радиального уравнения к уравнению с вещественным потенциалом

Интегрирование радиальных уравнений (22) или (57) при $s=0$ осложняется тем, что эффективные потенциалы становятся комплексными. При решении конкретных задач удобнее иметь дело с вещественными потенциалами, в этом случае, в частности, проще строятся квазиклассические приближения и т. п. Преобразование к уравнению с вещественным потенциалом при всех s было построено Чандрасекаром и Детвейлером [117—119]. В основе техники преобразования лежат соотношения (42), (43), (54), (55) между радиальными функциями с противоположными по знаку значениями s . В эти соотношения входят дифференциальные операторы второго (для $s=\pm 1$) и четвертого (для $s=\pm 2$) порядков. Поскольку сами радиальные функции удовлетворяют уравнениям второго порядка, то высшие производные можно выразить через сами функции и их первые производные. В результате получим соотношения вида

$$-{}_sR = A_s^2 \left(a_s(r) {}_sR + b_s(r) \Delta^{s+1} \frac{d{}_sR}{dr} \right), \quad (116)$$

где A_s — постоянные, $a_s(r)$ и $b_s(r)$ — некоторые функции и для упрощения записи опущены все индексы, кроме s . Функции ${}_sR$ удовлетворяют радиальному уравнению Тьюкольского

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \Delta^{s+1} \frac{d}{dr} {}_sR - {}_sU {}_sR = 0, \quad (117)$$

$${}_sU = -\mathcal{K}^2/\Delta + is\mathcal{K}\mathcal{K}'/\Delta - 2is\mathcal{K}' + {}_s\lambda; \quad \mathcal{K} = (r^2 + a^2)\omega - am, \quad (118)$$

где штрихом обозначена производная по r . Подстановка (116) в (117) и исключение высших производных от ${}_sR$ с помощью того же уравнения (с противоположным s) приводит к уравнению для a_s и b_s , имеющему интеграл

$$\kappa_s^2 = \Delta^{-2s} a_s^2 - \Delta {}_sU b_s^2 + (a_s b'_s - a'_s b_s) \Delta^{1-s} = \text{const.} \quad (119)$$

Введем величины $\alpha_s(r)$ и $\beta_s(r)$, связанные с $a_s(r)$ и $b_s(r)$ соотношениями

$$\alpha_s = \frac{\kappa_s + \Delta^{-s} a_s}{\sqrt{2}(\kappa_s + \Delta^{-s} \text{Re } a_s)^{1/2}}; \quad \beta_s = \frac{b_s \Delta^{-s}}{\sqrt{2}(\kappa_s + \Delta^{-s} \text{Re } a_s)^{1/2}}. \quad (120)$$

С помощью (119) нетрудно установить, что

$$\kappa_s = \alpha_s^2 - \beta_s^2 \Delta^{2s+1} {}_sU + (\alpha_s \beta'_s - \beta_s \alpha'_s) \Delta^{s+1}. \quad (121)$$

Если теперь составить комбинацию радиальных функций вида

$${}_sX = A_s [\Delta^s (r^2 + a^2)]^{1/2} (\alpha_s(r) {}_sR(r) + \beta_s(r) \Delta^{s+1} {}_sR'(r)), \quad (122)$$

то для нее мы также получим дифференциальное уравнение второго порядка, которое не будет содержать первых производных по черепашьей координате

$$\frac{d_s^2 X'}{dr^{*2}} - {}_s\mathcal{U} {}_sX = 0, \quad (123)$$

причем новый потенциал связан с (58) соотношением

$${}_s\mathcal{U} = -{}_sV + \frac{\Delta^{1-s}}{(r^2 + a^2)^2} \frac{2\alpha'_s + (\beta'_s \Delta^{s+1})'}{\beta_s}. \quad (124)$$

Входящие в дополнительный член в (124) функции α_s и β_s комплексны, в конечном счете они определяются (через (120)) соотношениями между радиальными функциями с противоположными s (116). Путем прямых, но весьма громоздких вычислений можно убедиться в том, что мнимая часть суммы (124) обращается в нуль, т. е. функция ${}_sX$ удовлетворяет уравнению с вещественным потенциалом (подробнее см. § 11).

Хотя описанная процедура может показаться искусственной, она удобна благодаря симметрии между прямым и обратным преобразованиями (122). Дифференцируя (122) по r , исключая вторую производную от ${}_sR$ с помощью (117) и затем выражая первую производную с помощью исходного уравнения через ${}_sX$, найдем обратное преобразование.

$$A_s \kappa_s {}_sR = (\alpha_s + \Delta^{s+1} \beta'_s) \frac{{}_sX}{[\Delta^s (r^2 + a^2)]^{1/2}} - \beta_s \Delta^{1+s} \frac{d}{dr} \left(\frac{{}_sX}{[\Delta^s (r^2 + a^2)]^{1/2}} \right). \quad (125)$$

Аналогичным образом можно построить преобразование, обратное к (116):

$$A_s^2 \kappa_s^2 \Delta^{2s} {}_sR = (\alpha_s + \Delta^{s+1} \beta'_s) {}_sR - \Delta^{s+1} b_s \frac{d}{dr} {}_sR. \quad (126)$$

Изложенный алгоритм получения радиальных уравнений с вещественным короткодействующим потенциалом является лишь одним из возможных, альтернативное построение см. в работе [120].

Длинноволновое приближение

Для волн малых частот $M\omega \ll 1$ решения радиального уравнения можно построить аналитически [95, 96] с помощью склейки приближенных решений, справедливых в окрестности особых точек. В этом случае спиновые сферические гармоники хорошо аппроксимируются спиновыми сферическими гармониками (Д.16),

а собственные значения равны ${}_s\lambda \approx (l-s)(l+s+1)$. В обозначениях (4.84), (4.85) радиальное уравнение (117) при $qx \ll l+1$ принимает вид

$$x^2(x+1)^2 \frac{d^2{}_sR}{dx^2} + (s+1)x(x+1)(2x+1) \frac{d{}_sR}{dx} + (Q^2 + i{}_sQ(2x+1) - {}_s\lambda x(x+1)){}_sR = 0. \quad (127)$$

Решение этого уравнения, регулярное на горизонте (типа in), выражается через гипергеометрическую функцию

$${}_sR_{lm}^+ = \frac{\Gamma(2l+2)\Gamma(s-2iQ)}{\Gamma(l+1-2iQ)\Gamma(l+s+1)} (x(x+1))^{-s} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{iQ} \times \\ \times F(-l-s, l-s+1; 1-s+2iQ; -x). \quad (128)$$

В силу свойства (23) радиального оператора вторым решением будет $(x(x+1))^{-s} {}_sR_{lm}^{+\star}$. Решение типа «ur» (представляющее собой расходящуюся волну при $r \rightarrow \infty$) получим, взяв сумму этих двух решений:

$${}_sR_{lm}^\infty \equiv {}_sR_{lm}^+ + (x(x+1))^{-s} {}_sR_{lm}^{+\star} = \\ = x^{-l-s-1} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{+iQ} F(l+1-s, l+1-2iQ; 2l+2; -\frac{1}{x}), \quad (129)$$

где для перехода ко второй строчке мы воспользовались соотношением, связывающим гипергеометрические функции со взаимно обратными аргументами. Решения (127) и (129) фактически совпадают со статическими решениями [98—100], зависимость от ω имеется лишь через величину Q .

В области $x \gg |Q|+1$ радиальное уравнение (117) аппроксимируется следующим:

$$-\frac{d^2{}_sR}{dx^2} + \frac{2(s+1)}{x} \frac{d{}_sR}{dx} + \left(q^2 + 2i \frac{sq}{x} - \frac{s\lambda}{x^2}\right) {}_sR = 0, \quad (130)$$

причем ${}_s\lambda = (l^*+s)(l^*-s+1)$ (с учетом поправок Д.18), где l^* не целое. При этом два линейно-независимых решения (130) можно выбрать в виде

$${}_sR_1 = e^{-iqx}(x)^{l^*-s} \Phi(l^*-s+1, 2l^*+2; 2iqx) \\ {}_sR_2 = e^{-iqx} x^{-l^*-s-1} \Phi(-l^*-s, -2l^*; 2iqx), \quad (131)$$

где Φ — вырожденная гипергеометрическая функция. Асимптотическое поведение некоторой линейной комбинации решений (131) при малых x совпадает с асимптотическим поведением решения (128) при больших x , что и следовало ожидать, поскольку эти решения получены в перекрывающихся областях. После того как сшивание произведено, можно положить $l^*=l$ (предварительно раскрыв неопределенности в отношениях гамма-функций). В ре-

зультате найдем, что решение (128) в области больших x склеивается со следующей комбинацией решений (131):

$${}_sR_{lm}^+ \rightarrow \frac{1}{2}(-1)^{l+s+1} {}_sR_2 + 2iQ(-1)^s {}_sR_1 \frac{(2l+1)!(2l)!}{(l-s)!(l+s)!} \left[\prod_{n=0}^l (4Q^2 + n^2) \right]^{-1}. \quad (132)$$

Далее, воспользовавшись асимптотическим разложением вырожденной гипергеометрической функции при больших значениях аргумента

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) \simeq \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \left(1 - \frac{\alpha(\alpha-\gamma+1)}{z} + \dots \right) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{z\alpha-\gamma} \left(1 + \frac{(1-\alpha)(\gamma-\alpha)}{z} + \dots \right), \quad (133)$$

можно получить функции in и up , нормированные в соответствии с (66), (67):

$$\begin{aligned} {}_sR^{in} &= \gamma_s (2|\omega|)^{1/2} (-1)^{l+1} (2iq)^{l-s} \frac{\omega}{Q} \frac{(l-s)}{2l} \times \\ &\times \left[\frac{(l+s)!}{(2l+1)!} \right]^2 \prod_{n=0}^l (4Q^2 + n^2) {}_sR^+, \\ {}_sR^{up} &= -i\delta_s \frac{\omega}{|\omega|} (2|\omega|)^{1/2} \frac{2l!}{(l+s)!} [2(r_+ - M)]^{-2s} (-2iq)^{-l+s-1} {}_sR^\infty. \end{aligned} \quad (134)$$

Одновременно при сшивании определяются значения коэффициентов отражения и прохождения в длинноволновом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_s &= (-1)^{l+1} (M^2 - a^2)^s \frac{(l+s)!}{(l-s)!} q^{-2s}, \\ \tau_s &= \left| \frac{k}{\omega} \right|^{1/2} 2^{2s} (M^2 - a^2) \frac{(2Mr_+)^{1/2}}{2(r_+ - M)} (-2iq)^{l-s+1} \times \\ &\times \frac{(l-s)!}{2l!} \frac{(l+s)!}{(2l+1)!} \frac{\Gamma(l+1+2iQ)}{\Gamma(1-s+2iQ)}. \end{aligned} \quad (135)$$

Разложение по гармоникам и законы сохранения

Общие формулы для изменения массы и углового момента черной дыры под действием возмущений, а также изменение энергии и углового момента поля за счет излучения на бесконечность были проведены (на примере скалярного поля) в § 4. Для электромагнитного поля в формулы (4.22), (4.23), (4.27) достаточно подставить тензор энергии-импульса в форме (5.33) или (5.34). Для гра-

витационного поля соответствующей величины нет, поэтому приходится прибегать к специальным приемам. Так, учитывая, что волновое поле вблизи горизонта событий испытывает бесконечное голубое смещение, в этой области можно использовать эффективный тензор энергии-импульса Айзексона [123]

$$T_{\mu\nu} = 1/32\pi (h_{\alpha\beta,\mu} h_{,\nu}^{\alpha\beta} - 2h_{,\beta}^{\alpha\beta} h_{\alpha(\mu, \nu)}). \quad (136)$$

Интересно, что подстановка (136) в (4.22) и (4.23) приводит к правильным результатам для всех частот. Альтернативный способ состоит в вычислении скорости изменения площади поверхности горизонта событий в соответствии с (4.24). Для этой величины Хокингом и Хартлем [55] было получено выражение

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2(2Mr_+)^2}{r_+ - M} \oint_{r=r_+} |\sigma'|^2 d\Omega, \quad (137)$$

где σ' — возмущение коэффициента сдвига в базисе (1.62).

С помощью тождеств Риччи, входящих в систему уравнений для гравитационного поля в формализме Ньюмена — Пенроуза, можно связать σ' с ψ_0' :

$$D'\sigma' = 2\varepsilon' + \psi_0', \quad (138)$$

где все величины отнесены к базису (1.62), ε' — значение коэффициента ε (равного нулю для тетрады Киннерсли) в этом базисе [109]:

$$\varepsilon' = \frac{1}{2} \mathcal{D}_0 \frac{\Delta}{2(r^2 + a^2)} = \frac{r_+ - M}{4Mr_+}, \quad (139)$$

оператор D' с учетом (4.26) на горизонте имеет вид

$$D' = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega_H \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (140)$$

Для гармоник с определенными $\{m, \omega\}$ $\mathcal{D}' \rightarrow -ik$, поэтому из (6.9) получим

$$\sigma'|_{r=r_+} = \frac{\psi_0'|_{r=r_+}}{-ik - 2\varepsilon'} = \frac{i\psi_0'|_{r=r_+}}{k_{-1}}. \quad (141)$$

В терминах тетрады Киннерсли $\psi_0 = \left(\frac{2(r^2 + a^2)}{\Delta} \right)^2 \psi_0'$, поэтому для возмущения с фиксированными $\{m, \omega\}$ из (137) найдем

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{32} \frac{1}{(Mr_+)^2 k_1 k_{-1}} \oint_{r=r_+} |\Delta^2 \psi_0|^2 d\Omega. \quad (142)$$

Учитывая, что для таких возмущений

$$dM = \frac{\omega}{m} dJ, \quad (143)$$

с помощью (4.24) находим

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\omega}{m} \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{64\pi} \frac{\omega}{kk_1k_{-1}} \cdot \frac{1}{(2Mr_+)^3} \oint_{r=r_+} |\Delta^2 \psi_0|^2 d\Omega. \quad (144)$$

К такому же результату можно прийти, подставляя (136) в правую часть (4.24) и учитывая, что на горизонте событий [98, 99]

$$\psi_0 = -1/2 \mathcal{D}_0^2 h_{mm}. \quad (145)$$

В случае электромагнитных возмущений также удобно воспользоваться соотношением (4.24) и, подставляя (5.34) в правую часть, выразить скорость изменения площади поверхности горизонта через скаляр Ньюмена—Пенроуза Φ_0 :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{16\pi Mr_+} \oint_{r=r_+} |\Delta \Phi_0|^2 d\Omega. \quad (146)$$

Далее для возмущений с фиксированными $\{m, \omega\}$ с помощью (4.24) и (140) найдем

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\omega}{m} \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{16\pi Mr_+} \frac{\omega}{k} \oint_{r=r_+} |\Delta \Phi_0|^2 d\Omega. \quad (147)$$

При задании граничных условий поглощения на поверхности горизонта (нижний знак в (65) при $s=1, 2$) величины $\Delta^2 \psi_0$ и $\Delta \Phi_0$ при $r \rightarrow r_+$ конечны.

Вычисление волновых потоков на пространственной бесконечности не вызывает затруднений. Для расходящихся электромагнитных волн при $r \rightarrow \infty$ $E_{\hat{\theta}} = B_{\hat{\varphi}}$, $E_{\hat{\varphi}} = -B_{\hat{\theta}}$, поэтому

$$\Phi_2^{(\text{расх})} \sim \frac{1}{r\sqrt{2}} (E_{\hat{\theta}} - iE_{\hat{\varphi}}); \quad \Phi_0^{(\text{расх})} \sim 0. \quad (148)$$

Подставляя (5.34) в (4.27) с учетом (140), найдем скорость изменения энергии и момента поля за счет потока электромагнитных волн, уходящих на бесконечность:

$$\frac{d\mathcal{E}_0^{(\text{расх})}}{dt} = \frac{\omega}{m} \frac{d\mathcal{E}_3^{(\text{расх})}}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \oint |r\Phi_2^{(\text{расх})}|^2 d\Omega. \quad (149)$$

Если энергия электромагнитного поля изменяется за счет притока электромагнитных волн из бесконечности, то на основании аналогичных рассуждений найдем

$$\Phi_0^{(cx)} \propto \frac{\sqrt{2}}{r} (E_{\hat{\theta}} + iE_{\hat{\varphi}}); \Phi_2^{(cx)} \propto 0, \quad (150)$$

что при подстановке в (5.34) и далее в (4.27) дает

$$\frac{d\mathcal{E}_0^{(cx)}}{dt} = \frac{\omega}{m} \frac{d\mathcal{E}_3^{(cx)}}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi} \oint |r\Phi_0^{(cx)}|^2 \quad (151)$$

(в обоих случаях вклад от Φ_1 отсутствует). Заметим, что вещественная и мнимая части Φ_2 (для расходящихся волн) и Φ_0 (для сходящихся) в асимптотической области $r \rightarrow \infty$ пропорциональны амплитудам двух независимых состояний линейной поляризации электромагнитных волн (θ и φ — компоненты).

Аналогичные вычисления для гравитационных волн на пространственной бесконечности осуществляются в рамках линеаризованной теории на фоне метрики Минковского [9, 36]. В терминах ортогональных компонент $h_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$, $h_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}$ и $h_{\hat{\theta}\hat{\varphi}}$ возмущений метрики для тетрадных проекций тензора Вейля ψ_0 и ψ_4 при $r \rightarrow \infty$ имеем в случае расходящихся волн

$$\psi_4^{(pacx)} \approx \frac{1}{2r} \frac{d^2}{dt^2} (h_{\hat{\theta}\hat{\theta}} - ih_{\hat{\theta}\hat{\varphi}}); \psi_0^{(pacx)} \approx 0 \quad (152)$$

(используется дважды поперечная бесследовая калибровка). Для сходящихся волн получим

$$\psi_0^{(cx)} \approx \frac{2}{r} \frac{d^2}{dt^2} (h_{\hat{\theta}\hat{\theta}} + ih_{\hat{\theta}\hat{\varphi}}); \psi_4^{(cx)} \approx 0. \quad (153)$$

Вещественная и мнимая части этих выражений соответствуют состояниям поляризации гравитационных волн, которые принято обозначать символами $+$ и \times , поляризационные тензоры для них имеют вид

$$e_{ij}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_i^\theta e_j^\theta - e_i^\varphi e_j^\varphi); \quad e_{ij}^\times = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_i^\theta e_j^\varphi + e_i^\varphi e_j^\theta) \quad (154)$$

в трехмерно-поперечной калибровке, где e^θ и e^φ — трехмерные орты вдоль направлений θ и φ в плоском пространстве. В силу выбора бесследовой калибровки $h_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = h_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$.

Соответствующие потоки энергии и момента, вычисляемые на основе стандартной теории [36] для гармоник с определенными $\{\omega, m\}$, записываются в виде

$$\frac{d\mathcal{E}_0^{(pacx)}}{dt} = \frac{\omega}{m} \frac{d\mathcal{E}_3^{(pacx)}}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\omega^2} \oint |r\psi_4^{(pacx)}|^2 d\Omega, \quad (155)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_0^{(cx)}}{dt} = \frac{\omega}{m} \frac{d\mathcal{E}_3^{(cx)}}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{64\pi\omega^2} \oint |r\psi_0^{(cx)}|^2 d\Omega, \quad (156)$$

где фактор $1/\omega^2$ возникает при дифференцировании по t с учетом того, что эффективный тензор энергии-импульса гравитационных волн [36] пропорционален квадрату первых производных от $h_{\mu\nu}$, а квадраты величин ψ_0 и $\psi_4 \sim \omega^4$.

Приведенные формулы для потоков энергии и аксиальной компоненты момента импульса полей через поверхность горизонта событий и бесконечно удаленную сферическую поверхность полезны при решении задач, в которых заданы соответствующие конфигурации полевых возмущений. В других задачах заданы источники возмущений, а сами поля вычисляются с помощью, например, изложенной выше техники. Построенные функции Грина для полевых возмущений (111) позволяют выразить потери энергии и аксиальной компоненты момента импульса непосредственно в виде интегралов, содержащих источники. При этом в соответствии с четырехмерным характером инвариантного интегрирования в (110) естественно возникают выражения для полных потерь

$$|s| \mathcal{E}_A^{\infty, H} = \int \frac{d_s \mathcal{E}_A^{\infty, H}}{dt} dt, \quad (157)$$

где введен индекс $|s| = 0, 1, 2$ для скалярных, электромагнитных и гравитационных возмущений соответственно, значения индекса $A = 0, 3$ отвечают энергии и проекции момента импульса на ось симметрии. Если источники возмущений локализованы в некоторой компактной области пространства, то вне этой области будем иметь расходящиеся волны (т. е. падающие на черную дыру и уходящие на бесконечность) либо соответствующие регулярные на горизонте и на бесконечности стационарные конфигурации полей, для которых можно использовать асимптотические радиальные функции (63), (65). Вычисление производных под знаком интеграла в (157) проводится далее на основании тех же рассуждений, что и вывод формул (144), (147), (149) (152) (сходящихся волн в такой постановке задачи нет). Явные вычисления будут проведены в § 12.

СТАЦИОНАРНЫЕ ВНЕШНИЕ ПОЛЯ ВОКРУГ ЧЕРНЫХ ДЫР

В этой главе рассматриваются создаваемые внешними источниками в пространстве-времени Керра пробные электромагнитные и гравитационные поля, не зависящие от времени в системе координат Бойера—Линдквиста. Согласно теореме Хокинга [5, 21], вращающаяся черная дыра приходит в стационарное состояние, лишь когда все поля становятся аксиально-симметричными. Однако, если влияние внешних полей на геометрию пространства-времени достаточно мало, его можно учитывать адиабатически, рассматривая в качестве нулевого приближения стационарные поля и не обладающие аксиальной симметрией. В § 9 обсуждаются связанные с воздействием неосесимметричных электромагнитных полей на вращающуюся черную дыру подемоторные явления. Предварительно строится теория аксиально-симметричных стационарных возмущений методом функций Грина обобщенного уравнения Лапласа.

§ 8. АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛЯ

Исследование не зависящих от времени осесимметричных конфигураций пробных скалярного, электромагнитного и гравитационного полей удастся провести, не прибегая к разделению переменных [122—123]. Для таких возмущений уравнение Тьюкольского можно свести к обобщенному уравнению Пуассона в двумерном пространстве [124—126], решения которого строятся в замкнутом виде для всех s . В отдельных случаях удастся непосредственно проинтегрировать уравнения Максвелла, так были построены решения для поля точечного заряда на оси симметрии черной дыры [127—132]. С помощью этих решений можно рассчитать силу взаимодействия, приложенную к точечной частице в сильном гравитационном поле черной дыры [133—137], а также соответствующую поправку к собственной энергии частицы [138—139]. Менее исследовался случай аксиально-симметричных стационарных возмущений гравитационного поля (см., например, [140], где используется метод разделения переменных). Ниже строится общая теория, применимая для безмассовых полей с $s=0, 1, 2$.

Соотношение между $s\psi$ и $-s\psi$

Покажем, что для некоторого класса стационарных осесимметричных электромагнитных и гравитационных полей скаляры $s\psi$ и

r, θ, φ связаны между собой соотношением пропорциональности. Рассмотрим сначала систему уравнений Максвелла (5.12) — (5.15) для аксиально-симметричных стационарных полевых конфигураций, полагая производные по t и φ от максвелловских скаляров равными нулю. Вводя новые функции

$$\tilde{\Phi}_1 = \rho^{-2} \Phi_1; \quad \tilde{\Phi}_2 = \frac{\sin \theta}{\rho} \Phi_2; \quad \tilde{\Phi}_0 = \Delta \rho \sin \theta \Phi_0, \quad (1)$$

представим систему уравнений Максвелла в виде

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial r} + (\sqrt{2} \rho^2 \Delta \sin \theta)^{-1} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \theta} = 2\pi \rho^{-2} J_l; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial r} - \sqrt{2} (\rho^2 \Delta \sin \theta)^{-1} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial \theta} = 4\pi \Delta^{-1} \rho^{-3} (\rho^*)^{-1} J_n; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \theta} - (\sqrt{2} \rho^2 \sin \theta)^{-1} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial r} = -2\sqrt{2} \pi \rho^{-2} (\rho^*)^{-1} J_m; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \theta} + \sqrt{2} (\rho^2 \sin \theta)^{-1} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial r} = 2\sqrt{2} \pi \rho^{-3} J_{m*}. \quad (5)$$

Нас будут интересовать поля, создаваемые токами вида

$$J^\mu = \{J^0(r, \theta), 0, 0, J^3(r, \theta)\}, \quad (6)$$

очевидным образом удовлетворяющими уравнению непрерывности

$$J^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (J^\mu \sqrt{-g})_{;\mu} = 0. \quad (7)$$

Для тетрадных проекций тока (6) выполняются соотношения

$$J_{m\rho^*} = -J_{m*}\rho; \quad J_n = \Delta \rho \rho^* / 2J_l, \quad (8)$$

поэтому, вычитая уравнение (3) из (2) и (5) из (4), находим, что $\tilde{\Phi}_0 = -2\tilde{\Phi}_2 + \text{const}$, причем в согласии с требованием конечности Φ_0 и Φ_2 при $\theta=0, \pi$ постоянную интегрирования нужно положить равной нулю. В результате имеем

$$\Delta \rho^2 \Phi_0 = -2\Phi_2 \quad (9)$$

или

$$-{}_1\psi = -\frac{\Delta}{2} {}_1\psi. \quad (10)$$

Это соотношение можно также вывести из уравнения Тьюкольского (7.4). Для возмущений, порождаемых источником (6), проекции $\pm {}_1T$ тока, входящие в уравнение Тьюкольского, можно полу-

чить с помощью проекционных операторов вида (6.77), (6.78), опуская в них компоненты $\mu=1, 2$, что эквивалентно следующей замене векторов тетрады:

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \lambda &\equiv \frac{1}{2} 1 + \frac{\Sigma}{\Delta} n; \quad n \rightarrow v \equiv \frac{1}{2} n + \frac{\Delta}{4\Sigma} 1; \\ m \rightarrow \mu &\equiv \frac{1}{2} (m - \rho^* \rho^{-1} m^*). \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая, что на множестве функций, зависящих лишь от r и θ , операторы \mathcal{D}_n и \mathcal{D}_n^+ совпадают между собой (то же верно и для \mathcal{L}_s и \mathcal{L}_s^+), получим «укороченные» проекционные операторы

$${}_1\tau'^\mu = -\frac{2}{\Delta} {}_{-1}\tau'^\mu = \frac{\rho}{\Sigma} (\mathcal{D}_0\mu^\mu + \sqrt{2} \mathcal{L}_0\rho^*\lambda^\mu) \frac{\Sigma}{\rho}. \quad (12)$$

Выражаемая этим соотношением связь между ними означает, что

$$-{}_1T = -\Delta/2 {}_1T. \quad (13)$$

Понимая всюду далее в этой главе под \mathcal{D}_n и \mathcal{L}_s сужения соответствующих операторов на множество функций, зависящих от двух переменных r и θ , можно переписать операторы Тьюкольского в виде

$${}_1\Box = \mathcal{D}_0^2\Delta + \mathcal{L}_0\mathcal{L}_1; \quad {}_{-1}\Box = \Delta\mathcal{D}_0^2 + \mathcal{L}_0\mathcal{L}_1, \quad (14)$$

откуда очевидно соотношение

$$-{}_1\Box = \Delta {}_1\Box \Delta^{-1}. \quad (15)$$

Учитывая связь (13) между источниками, находим, что с точностью до решений однородных уравнений величины ${}_1\psi$ и ${}_{-1}\psi$ должны быть связаны соотношением (10). Заметим, что для проекционных операторов ${}_{\pm 1}M_\mu'$, связывающих ${}_{\pm 1}\psi$ с 4-потенциалом, также имеет место соотношение

$${}_1M'^\mu = -\frac{2}{\Delta} {}_{-1}M'^\mu \quad (16)$$

в калибровке потенциалов, при которой отличны от нуля A_0 и A_3 . Имеется также связь между проекторами

$${}_1\tau'^\mu = \rho^2 M'^\mu \rho^{-2} \quad (17)$$

(в этих формулах под ${}_sM'^\mu$ понимаются операторы, получающиеся из (6.94) и (6.95) с помощью замены (11)).

Аналогичные утверждения можно сделать для не зависящих от времени осесимметричных возмущений метрики, порождаемых распределением материи, описываемым тензором энергии-импульса с единственными отличными от нуля компонентами T_{00} , T_{03}

и T_{33} , зависящими от τ и θ . Такое распределение материи удовлетворяет условию консервативности, если

$$g_{\mu\nu,\lambda} T^{\mu\nu} = 0. \quad (18)$$

В этом случае также можно сделать замену (11) в выражениях для проекционных операторов (6.18), (6.21), в результате чего получим

$$\begin{aligned} {}_2\tau'^{\alpha\beta} = \Delta^{-2} {}_2\tau'^{\alpha\beta} = & -\rho^4 \rho^* [V\sqrt{2} (\mathcal{L}_{-1} \rho^{*2} \rho^{-4} \mathcal{D}_0 + \\ & + \mathcal{D}_0 \rho^{*2} \rho^{-4} \mathcal{L}_{-1}) \rho \rho^{*-1} \lambda^{\alpha\mu\beta} + \mathcal{L}_{-1} \rho^{-4} \mathcal{L}_0 \rho^{*2} \rho \lambda^{\alpha\lambda\beta} + \\ & + 2 \mathcal{D}_0 \rho^{-4} \mathcal{D}_0 \rho \mu^{\alpha\mu\beta}] \Sigma, \end{aligned} \quad (19)$$

и, следовательно,

$${}_2T = \Delta^2/4 \cdot {}_2T. \quad (20)$$

Операторы Тьюкольского (7.1) при $s = \pm 2$ переходят в

$${}_2\Box = \Delta^{-1} \mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_0 \Delta^2 + \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_2; \quad {}_{-2}\Box = \Delta \mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_2 \quad (21)$$

и связаны соотношением

$${}_2\Box = \Delta^2 {}_{-2}\Box \Delta^{-2}. \quad (22)$$

Таким образом, с точностью до решений однородных уравнений находим

$${}_2\psi = \Delta^2/4 \cdot {}_2\psi \quad (23)$$

или

$$\Delta^2 \rho^4 \psi_0 = 4 \psi_4. \quad (24)$$

Объединяя это соотношение с формулой (10) для электромагнитных возмущений, получаем

$${}_s\psi = \left(-\frac{\Delta}{2} \right)^s {}_s\psi. \quad (25)$$

Это равенство можно также установить, комбинируя перекрестные соотношения (5.27) и (5.28) для электромагнитного и (6.70) и (6.71) для гравитационного полей с уравнением (7.4). Так, формулу (9) можно получить непосредственно из (2.27), учитывая явный вид операторов Тьюкольского (14). Несколько сложнее доказать (24) исходя из (6.70). Предварительно, воспользовавшись представлением

$$\mathcal{L}_s = (\sin \theta)^{-s} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta)^s, \quad (26)$$

убедимся в справедливости операторного равенства

$$\mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_{-1} - 2, \quad (27)$$

с помощью которого (6.70) переписывается в виде

$$(\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_2)^2{}_2\psi - 2\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_2{}_2\psi = 4\mathcal{D}_0^4{}_2\psi. \quad (28)$$

Далее, воспользовавшись уравнением (7.4) при $s=2$ вне области локализации источника, представим (28) в форме

$$\Delta^{-1}\mathcal{D}_{-1}\mathcal{D}_0\Delta\mathcal{D}_{-1}\mathcal{D}_0\Delta^2{}_2\psi + 2\Delta^{-1}\mathcal{D}_{-1}\mathcal{D}_0\Delta^2{}_2\psi = 4\mathcal{D}_0^4{}_2\psi. \quad (29)$$

С помощью формулы (4.41) в первом слагаемом сделаем преобразование

$$\Delta^{-1}\mathcal{D}_{-1}\mathcal{D}_0\Delta\mathcal{D}_{-1}\mathcal{D}_0 = \Delta^{-1}\mathcal{D}_{-1}\Delta(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_{-1})\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0^4 - 2\Delta^{-1}\mathcal{D}_{-1}\mathcal{D}_0 \quad (30)$$

(при этом было использовано легко проверяемое тождество

$$\mathcal{D}_1\mathcal{D}_{-1} = \mathcal{D}_0^2 - 2\Delta^{-1}). \quad (31)$$

После подстановки (30) в (29) происходят сокращения, и мы получаем равенство (23) под знаком оператора \mathcal{D}_0^4 . К аналогичному результату приводит соотношение (6.71).

Функции Грина

Решения уравнения Тьюкольского (7.4) для аксиально-симметричных стационарных возмущений удастся построить, не прибегая к разделению переменных. Идея метода состоит в сведении оператора Тьюкольского к оператору Лапласа в пространстве высшей размерности. На множестве функций, зависящих лишь от r и θ , оператор ${}_s\Box$ принимает вид

$${}_s\Box' = \Delta \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + 2(s+1)(r-M) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + s(1 - s \operatorname{ctg}^2 \theta). \quad (32)$$

Введем координаты Вейля

$$z = (r-M) \cos \theta; \quad R = \sqrt{\Delta} \sin \theta \quad (33)$$

и новую функцию

$${}_s\tilde{\psi} = (\sin \theta)^{-s} {}_s\psi. \quad (34)$$

Уравнение Тьюкольского (7.4) в новых переменных будет иметь форму

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{J} (\sin \theta)^s \Delta_{(1+2s)} {}_s\tilde{\psi} = -4\pi \Sigma_s T, \quad (35)$$

где символом $\Delta_{(p)}$ обозначен обобщенный оператор Лапласа [125]

$$\Delta_{(p)} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{p}{R} \frac{\partial}{\partial R} \quad (36)$$

и J — якобиан преобразования координат

$$J = \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(z, R)} = \sqrt{\Delta} [\Delta + (M^2 - a^2) \sin^2 \theta]^{-1}. \quad (37)$$

Отыскание возмущений ${}_s\psi$ сводится, таким образом, к решению обобщенного уравнения Лапласа

$$\Delta_{(1+2s)} {}_s\psi(z, R) = -{}_sj(z, R) \quad (38)$$

с источником ${}_sj = 4\pi \Sigma J_s TR^{-1} (\sin \theta)^{-s+1}$, зависящим от двух переменных z, R . В дальнейшем удобнее иметь дело с оператором $\Delta_{(p)}$ при положительных значениях индекса p . В случае отрицательных s воспользуемся операторным тождеством

$$\Delta_{(1-2|s|)} R^{2|2s|} = R^{2|s|} \Delta_{(1+2|s|)}, \quad (39)$$

которое позволяет записать $\Delta_{(1+2s)}$ в виде

$$\Delta_{(1+2s)} = R^{|s|-s} \Delta_{(1+2|s|)} R^{s-|s|}. \quad (40)$$

Построим функцию Грина $G_{|s|}(z, R; z', R')$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta_{(1+2|s|)} G_{|s|}(z, R; z', R') = \frac{1}{R^{(1+2|s|)}} \delta(R - R') \delta(z - z'). \quad (41)$$

Оператор $\Delta_{(p)}$ (36) можно понимать как сужение оператора Лапласа в евклидовом пространстве $p+2$ измерений $\{\xi_1 \dots \xi_{p+2}\}$ на множество функций, зависящих от двух переменных $z = \xi_{p+2}$,

$R = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_{p+1}^2}$. Действительно, вводя в $p+2$ -мерном евклидовом пространстве цилиндрические координаты z, R и угловые переменные $\alpha_1 \dots \alpha_p$

$$\xi_1 = R \cos \alpha_1,$$

$$\xi_2 = R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \quad (42)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\xi_{p+2} = R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_p,$$

оператор Лапласа в этом пространстве представим в виде

$$\sum_{i=1}^{p+2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{p}{R} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{R^2} L_{(p)}^2, \quad (43)$$

где $L_{(p)}^2$ — оператор Лапласа—Бельтрами на единичной сфере в p -мерном пространстве, действующий на переменные $\alpha_1 \dots \alpha_p$. Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\sum_{i=1}^{p+2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} g(\xi - \xi') = -\rho \Omega_{p+2} \delta^{p+2}(\xi - \xi'), \quad (44)$$

где через ξ обозначен вектор $\{\xi_1 \dots \xi_{p+2}\}$, $\delta^{p+2}(\xi) = \delta(\xi_1) \delta(\xi_2) \dots \delta(\xi_{p+2})$, Ω_n — объем единичной сферы в евклидовом пространстве n измерений

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (45)$$

Решением уравнения (44) является «кулоновский» потенциал

$$g(\xi - \xi') = \frac{1}{\mathcal{R}^p}; \quad \mathcal{R} = \left[\sum_{i=1}^{p+2} (\xi_i - \xi'_i)^2 \right]^{1/2}, \quad (46)$$

в чем нетрудно убедиться с помощью теоремы Остроградского—Гаусса.

Перейдем теперь в уравнении (44) к цилиндрическим координатам и проинтегрируем правую и левую части по сферическим углам $\alpha_1' \dots \alpha_p'$ вектора ξ' , учитывая, что элемент объема равен

$$d^{p+2}\xi = dz R^p dR \sin^{p-1} \alpha_1 \sin^{p-2} \alpha_2 \dots \sin \alpha_{p-1} d\alpha_1 \dots d\alpha_p. \quad (47)$$

В результате найдем, что функция

$$\overset{\circ}{g} = \frac{1}{\rho \Omega_{p+2}} \oint \sin^{p-1} \alpha_1' \dots \sin \alpha_{p-1}' d\alpha_1' \dots d\alpha_p' g(\xi - \xi') \quad (48)$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\Delta_{(p)} + \frac{1}{R^2} L_{(p)}^2 \right) \overset{\circ}{g} = -\frac{1}{R'^p} \delta(R - R') \delta(z - z'). \quad (49)$$

Поскольку нас интересует решение этого уравнения, зависящее только от R и z (ср. с (41)), то без ограничения общности можно положить в (48) $R = \xi_1$, т. е. выбрать $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$. Тогда функция \mathcal{R} в (46) равна

$$\mathcal{R} = [(z - z')^2 + R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha_1']^{1/2} \quad (50)$$

и интегрирование по $\alpha_2' \dots \alpha_p'$ в (48) дает

$$\Omega_p = \oint \sin^{p-2} \alpha_2' \dots \sin \alpha_{p-1}' d\alpha_2' \dots d\alpha_p', \quad (51)$$

после чего остается интеграл вида

$$\overset{\circ}{g}_0 = \frac{1}{\rho \Omega_{p+2}} \int_0^\pi \mathcal{R}^{-p} \sin^{p-1} \alpha_1' d\alpha_1'. \quad (52)$$

Учитывая, что применительно к построенному таким способом решению \tilde{g}_0 второй член в левой части (49) вклада не дает, а также принимая во внимание соотношение

$$\frac{\Omega_p}{\Omega_{p+2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right)}{\pi \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} = \frac{p}{2\pi}, \quad (53)$$

находим для функции Грина уравнения (41) следующее представление:

$$G_{|s|}(z, R; z', R') = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \mathcal{R}^{-(1+2|s|)}(x) (1-x^2)^{|s|-1/2} dx, \quad (54)$$

где $x = \cos \alpha_1'$.

При $z' \rightarrow z$, $R' \rightarrow R$, эта функция имеет логарифмическую особенность. Пусть $y^2 = (z-z')^2 + (R-R')^2$, тогда в интеграле

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{p-1} \alpha d\alpha}{[y^2 + 2RR'(1 - \cos \alpha)]^{p/2}}$$

особенность при $y=0$ формируется в области малых α . Полагая $\sin \alpha \simeq \alpha$, при $y \rightarrow 0$ с логарифмической точностью найдем

$$\int_0^\pi \frac{\alpha^{p-1} d\alpha}{(y^2 + RR'\alpha^2)^{p/2}} \approx -\frac{\ln y}{(RR')^{p/2}}. \quad (55)$$

Итак, в окрестности особой точки $y=0$

$$G_{|s|} \approx -\frac{1}{2\pi} (RR')^{-\frac{1+2|s|}{2}} \ln [(z-z')^2 + (R-R')^2]^{1/2}, \quad (56)$$

откуда вновь получаем (41).

Записывая решение уравнения (38) с помощью построенной функции Грина и возвращаясь к переменным r , θ , получаем

$${}_s\psi = 4\pi \int G_{|s|}(z, z'; R, R') \Sigma' \sin \theta'_s T' \left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^{s/2} (RR')^{|s|} d\theta' dr', \quad (57)$$

где штрихи означают, что соответствующие величины берутся в точках r' , θ' . Построение соответствующих возмущений полей A_μ и $h_{\mu\nu}$ осуществляется с помощью техники потенциалов Дебая аналогично § 6, однако не прибегая к разделению переменных.

Потенциалы Дебая и возмущения полей

Комплексные потенциалы \mathcal{A}^μ и $h^{\mu\nu}$ в лоренцевой калибровке $(\mathcal{A}^\mu \sqrt{-g})_{,\mu} = 0$, $(h^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\nu} = 0$ можно построить, применяя

изложенный в § 6 метод к укороченным операторам (12), (19):

$${}_s\mathcal{A}_\mu = {}_s\tau'_\mu{}^\star - {}_s\Xi, \quad s = \pm 1; \quad {}_s h_{\mu\nu} = {}_s\tau'_{\mu\nu}{}^\star - {}_s\Xi, \quad s = \pm 2. \quad (58)$$

Явные выражения для операторов ${}_s\tau'$ следуют из формул (6.64) и (6.88) в результате замены (11) векторов тетрады. Учитывая, что полевые функции с противоположными s связаны простым соотношением (25), достаточно ограничиться $s=1, 2$:

$${}_1\tau'_\alpha{}^\star = -(\rho^*)^{-1}[\rho/V\sqrt{2}\lambda_\alpha\mathcal{L}_1 + \mu_\alpha^\star\mathcal{D}_0]\rho^*; \quad (59)$$

$$\begin{aligned} {}_2\tau'_{\alpha\beta}{}^\star = & - \left[V\sqrt{2}\lambda_{(\alpha}\mu_{\beta)} \left(\mathcal{L}_2 \frac{\rho^2}{\rho^{*4}} \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0 \frac{\rho^2}{\rho^{*4}} \mathcal{L}_2 \right) + \right. \\ & \left. + \lambda_\alpha\lambda_\beta \frac{\rho}{\Sigma} \mathcal{L}_1 \frac{1}{\rho^{*4}} \mathcal{L}_2 + 2 \frac{\rho^2}{\rho^{*2}} \mu_\alpha\mu_\beta \mathcal{D}_0 \frac{1}{\rho^{*4}} \mathcal{D} \right] \rho^{*3}. \end{aligned} \quad (60)$$

Дальнейшая задача состоит в отыскании потенциалов Дебая ${}_s\Xi$ в области вне локализации источников по известным полевым функциям ${}_s\psi$, найденным с помощью (57). Здесь не следует использовать разложения по сфероидальным функциям. Вместо этого, воспользовавшись формулами (5.36) и (6.72), запишем

$$-{}_1\psi = 1/4 \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_{1-1} \Xi; \quad (61)$$

$$-{}_2\psi = 1/8 \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_{2-2} \Xi. \quad (62)$$

Учитывая явный вид операторов \mathcal{L}_s (26), имеем

$$-{}_1\psi = \frac{1}{4} \partial_\theta \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta {}_{-1}\Xi = \frac{1}{2} \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial \cos \theta} \right)^2 \sin \theta {}_{-1}\Xi; \quad (63)$$

$$\begin{aligned} -{}_2\psi &= \frac{1}{8} \sin \theta \partial_\theta \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin^2 \theta {}_{-2}\Xi = \\ &= \frac{\sin^3 \theta}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \cos \theta} \right)^4 \sin^2 \theta {}_{-2}\Xi. \end{aligned} \quad (64)$$

Обращение этих формул дает

$$-{}_1\Xi = 4 \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_0^{-1} {}_{-1}\psi + {}_{-1}\Xi^S, \quad (65)$$

$$-{}_2\Xi = 8 \mathcal{L}_2^{-1} \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_{-1}^{-1} {}_{-2}\psi + {}_{-2}\Xi^S, \quad (66)$$

где введены обратные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_0^{-1} \dots &= \frac{1}{\sin \theta} \int^\theta d\theta' \sin \theta' \int^\theta d\theta'' \dots, \\ \mathcal{L}_2^{-1} \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_{-1}^{-1} \dots &= \end{aligned} \quad (67)$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \theta} \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' \int_0^{\theta'} \sin \theta'' d\theta'' \int_0^{\theta''} \sin \theta''' d\theta''' \int_0^{\theta'''} \frac{1}{\sin \theta''''} d\theta'''' \dots \quad (68)$$

При интегрировании появляются неопределенные функции радиальной координаты r , которые следует выбрать так, чтобы построенные потенциалы Дебая ${}_s\Xi$ правильно воспроизводили скаляры ${}_s\psi$, а также соответствовали граничным условиям для искомых полей A_μ и $h_{\mu\nu}$. Если первые слагаемые в (65), (66) приводят к правильным решениям для ${}_s\psi$, то этот произвол переносится на функции ${}_s\Xi$, последние также не должны изменять ${}_s\psi$, откуда следуют условия

$$\mathcal{L}_0 \mathcal{L}_{-1} {}_s\Xi = 0, \quad (69)$$

$$\mathcal{D}_0^2 {}_s\Xi = 0 \quad (70)$$

для электромагнитного поля (последнее вытекает из (10) и (5.35)), и

$$\mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_{-2} {}_s\Xi = 0, \quad (71)$$

$$\mathcal{D}_0^4 {}_s\Xi = 0 \quad (72)$$

для гравитационного. В последнем случае имеются также условия на ${}_s\Xi$, которые должны обеспечить физические значения вейлевских скаляров ψ_1 и ψ_3 . С физической точки зрения произвол в выборе потенциалов Дебая связан с возможностью изменения параметров черной дыры (заряда, массы и углового момента), что сказывается на величинах Φ_1 , Φ_2 , однако не изменяет $\pm_1\psi$, $\pm_2\psi$. Таким образом, при минимальном определении обратных операторов в указанном выше смысле добавки ${}_s\Xi$ призваны учесть возможное малое изменение параметров черной дыры.

Рассмотрим в качестве примера случай электромагнитных возмущений, которые полностью описываются тремя скалярами Φ_0 , Φ_2 , Φ_1 . В силу (69), (70) потенциал Дебая ${}_s\Xi$ дает нулевые Φ_0 и Φ_2 , однако величина Φ_1 , вообще говоря, отлична от нуля. Это соответствует возможности сообщения черной дыре (малых) электрического Q и магнитного P зарядов

$$\Phi_1 = -\frac{(Q + iP)\rho^2}{2}. \quad (73)$$

Из уравнения (69) следует, что ${}_s\Xi$ можно представить в виде

$${}_s\Xi = q(r) \operatorname{ctg} \theta + \frac{p(r)}{\sin \theta}. \quad (74)$$

Поскольку $\mathcal{D}_0 = \partial_r$, уравнение (70) означает, что $q(r)$ и $p(r)$ являются линейными функциями

$$\begin{aligned} q(r) &= q_0 + q_1 r, \\ p(r) &= p_0 + p_1 r. \end{aligned} \quad (75)$$

Подставляя (74) в формулу (5.37), для Φ_1 получим

$$\Phi_1 = \frac{(q_0 - iap_1)}{2\sqrt{2}} \rho^2, \quad (76)$$

при этом постоянные q_1 и p_0 остаются неопределенными. Сопоставляя (76) с (73), для двух (комплексных) постоянных q_0 и p_1 находим

$$\frac{q_0 - iap_1}{\sqrt{2}} = -(Q + iP). \quad (77)$$

Обратимся теперь к вычислению компонент 4-потенциала (57). Прежде всего отметим, что потенциал \mathcal{A}_μ , как следует из (59), имеет лишь две отличные от нуля компоненты

$$\mathcal{A}_\mu = (\mathcal{A}_0, 0, 0, \mathcal{A}_3); \quad (78)$$

$$\mathcal{A}_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho}{\rho^*} (\mathcal{L}_1 + ia \sin \theta \mathcal{D}_0) \rho_{-1}^* \Xi; \quad (79)$$

$$\mathcal{A}_3 = +\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho \sin \theta}{\rho^*} (a \sin \theta \mathcal{L}_1 + i(r^2 + a^2) \mathcal{D}_0) \rho_{-1}^* \Xi. \quad (80)$$

Поскольку \mathcal{A}_0 и \mathcal{A}_3 являются функциями только r и θ , потенциал (78) в метрике Керра удовлетворяет калибровочному условию Лоренца

$$\mathcal{A}_{;\mu}^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} (\mathcal{A}^\mu \sqrt{-g})_{;\mu} = 0. \quad (81)$$

Потенциал в рассматриваемой калибровке отличается от \mathcal{A}^{in} (5.43) — (5.45) градиентным преобразованием

$$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^{\text{in}} + \nabla_\mu f, \quad (82)$$

где

$$f = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_0^{-1} (\rho^*)^{-1} \mathcal{D}_0 \rho_{-1}^* \Xi, \quad (83)$$

причем, очевидно, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^{\text{in}}$; $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_3^{\text{in}}$ ($_{-1}\Xi$ совпадает с потенциалом Дебая Ξ^{in} , введенным в § 5).

Компоненты комплексного 4-потенциала, отвечающего кулоновскому потенциалу Дебая (79), равны

$$\mathcal{A}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-q_1 + \frac{q_0 - iap_1}{\Sigma \rho^*} \right). \quad (84)$$

$$\mathcal{A}_\varphi = -\mathcal{A}_0 a \sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} (q_1 a + i p_1 r + (q_0 - i a p_1) i \cos \theta). \quad (85)$$

Как видно из (84), постоянная q_1 определяет значение нулевой компоненты потенциала при $r \rightarrow \infty$. Чтобы сделать его равным нулю, достаточно положить $q_1 = 0$. Чтобы избежать возрастания \mathcal{A}_φ при $r \rightarrow \infty$, целесообразно выбрать также $p_1 = 0$. Наконец, постоянная p_0 не входит ни в выражение (76) для Φ_1 , ни в формулы для 4-потенциала, поэтому можем положить $p_0 = 0$. Окончательно с учетом равенства (77) найдем кулоновский потенциал Дебая

$$-{}_1\Xi = -\sqrt{2}(Q + iP) \operatorname{ctg} \theta, \quad (86)$$

который соответствует монопольным электрическому и магнитному полям.

Комплексный потенциал горизонта, соответствующий (84), (85), как и следовало ожидать на основании общих теорем, является постоянным

$$\mathcal{V}_H = \mathcal{A}_0 + \Omega_H \mathcal{A}_3 = \frac{Q + iP}{2M}, \quad (87)$$

его вещественная часть — электростатический потенциал — совпадает с (1.24), мнимая часть описывает магнитостатический потенциал магнитного заряда P .

Точечный заряд на оси симметрии

Рассмотрим пример заряженной частицы, удерживаемой в покое в точке $r = r_0$ на оси симметрии поля Керра. Соответствующая плотность тока равна

$$j^\mu = \frac{e}{2\pi\Sigma} \delta^{\mu 0} \delta(r' - r_0) \delta(\cos \theta' - 1); \quad e = e' + ie'' \quad (88)$$

(e' — электрический, e'' — магнитный заряды).

Подставляя (88) в выражение для источника ${}_1T$ и далее в (57) и учитывая, что при $\theta' = 0$ координата R' в (54) обращается в нуль (интеграл в (54) становится тривиальным), получаем для ${}_1\psi$ простое выражение

$${}_1\psi = \frac{e}{2\sqrt{2}} \Delta \Delta_0 \rho_0^* \sin \theta \mathcal{R}_0^{-3}, \quad (89)$$

где Δ_0 и ρ_0^* вычислены в точке $r = r_0$, $\cos \theta = 1$,

$$\mathcal{R}_0 = [\Delta + \Delta_0 + (M^2 - a^2)(1 + \cos^2 \theta) - 2(r - M)(r_0 - M) \cos \theta]^{1/2}. \quad (90)$$

В соответствии с алгоритмом, сформулированным в предыдущем разделе, далее нужно построить такое частное решение для потенциала Дебая, которое приводит к величине ${}_1\psi$, связанной с ${}_1\psi$.

соотношением (10). Это осуществляется с помощью легко проверяемых соотношений

$$\mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1 \left(\frac{\mathcal{R}_0}{\sin \theta} \right) = -\Delta \Delta_0 \frac{\sin \theta}{\mathcal{R}_0^3}, \quad (91)$$

$$\mathcal{D}_0^2 \left(\frac{\mathcal{R}_0}{\sin \theta} \right) = \frac{\Delta_0 \sin \theta}{\mathcal{R}_0^3}, \quad (92)$$

из которых следует, что в указанном выше смысле

$$\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_0^{-1} \psi = -\frac{e \rho_0}{2 \sqrt{2} \sin \theta} \mathcal{R}_0. \quad (93)$$

К этому выражению следует добавить кулоновский член общего вида (74), что дает

$$-{}_1\Xi = -e \rho^* \sqrt{2} \frac{\mathcal{R}_0}{\sin \theta} + q(r) \operatorname{ctg} \theta + \frac{p(r)}{\sin \theta}, \quad (94)$$

и далее найти коэффициенты q_0, q_1, p_0, p_1 исходя из асимптотического поведения $-{}_1\Xi$ на бесконечности, где должно быть кулоново поле заряда e и доопределения калибровки 4-потенциала, вычисляемого с помощью (57). При $r \rightarrow \infty$

$$\mathcal{R}_0 \approx r - M - (r_0 - M) \cos \theta, \quad (95)$$

и мы получаем

$$-{}_1\Xi_\infty = q'(r) \operatorname{ctg} \theta + p'(r) / \sin \theta, \quad (96)$$

где $q'(r)$ и $p'(r)$ — новые линейные функции r , $q' = q_0' + q_1' r$, $p' = p_0' + p_1' r$, причем

$$q_0' = q_0 + e(r_0 - M) \rho_0^* \sqrt{2}; \quad q_1' = q_1; \quad (97)$$

$$p_0' = p_0 + e M \rho_0^* \sqrt{2}; \quad p_1' = p_1 - e \rho_0^* \sqrt{2}.$$

Учитывая соотношение (77), находим, что построенное решение действительно будет отвечать полному заряду e при выполнении условий

$$\operatorname{Re}(q_0' - i a p_1') = -\sqrt{2} e, \quad \operatorname{Im}(q_0' - i a p_1') = 0. \quad (98)$$

Соответствующие асимптотические выражения для компонент комплексного 4-потенциала будут иметь вид (84), (85), где следует заменить коэффициенты на штрихованные. Во избежание возрастания потенциала на бесконечности следует положить $q_1' = p_1' = 0$, наконец, согласно (77) $q_0 = -\sqrt{2} e$. Полный потенциал Де-

бая с учетом кулоновской добавки принимает вид

$$-1\Xi = -\frac{\sqrt{2}\epsilon\rho_0^*}{\sin\theta}(\rho^{*-1} + 2M\sin^2\theta/2 + \mathcal{R}_0). \quad (99)$$

При $r_0 \rightarrow r_+$, т. е. при опускании заряда в черную дыру, имеем

$$\mathcal{R}_0|_{r_0=r_+} = r - M - \sqrt{M^2 - a^2} \cos\theta \quad (100)$$

и полный потенциал Дебая (99) принимает вид (86) для заряда e . Таким образом, конфигурация электромагнитного поля при приближении заряда к горизонту событий непрерывно переходит в соответствующую конфигурацию для заряженной черной дыры.

Подставляя выражение в (79) и (80), находим компоненты комплексного 4-потенциала

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 = \epsilon\rho\rho_0^* \left\{ M + \frac{1}{\mathcal{R}_0} [(r-M)(r_0-M) - (M^2 - a^2) \cos\theta + \right. \\ \left. + ia(r-M - (r_0-M) \cos\theta) \right\}, \end{aligned} \quad (101)$$

$$\mathcal{A}_3 = -A_0 a \sin^2\theta - i\epsilon\rho_0^* \left[M(1 - \cos\theta) + \mathcal{R}_0 + \frac{r-M - (r_0-M) \cos\theta}{\mathcal{R}_0\rho^*} \right]. \quad (102)$$

Отделив вещественную часть, получим при $e''=0$ потенциал точечного заряда, найденный в работах [122—123], где была исправлена формула Копсона [127] (в [127] не было учтено первое слагаемое, пропорциональное M , происходящее от кулоновской добавки к потенциалу Дебая). В отличие от формул, приведенных в [122—123], комплексный потенциал, найденный выше, порождает самодуальный максвелловский тензор (5.1). При $e=ie''$ этот потенциал описывает поле магнитного монополя.

Вычислим значение комплексного потенциала \mathcal{V} горизонта событий (87), отвечающее заряду $e=e'+ie''$ в точке r_0 . Поскольку величина \mathcal{V} не может зависеть от угла θ (см. § 1), можно одновременно положить $r=r_+$, $\theta=0$; тогда $\mathcal{R}_0=r_0-r_+$ и $\mathcal{A}_0=-\epsilon\rho_0^*$, $\mathcal{A}_3=ie$; в результате находим

$$\mathcal{V} = e/2M, \quad (103)$$

т. е. точечный заряд создает на горизонте такой же потенциал, какой создавала бы заряженная дыра с тем же значением заряда ($|e| \ll M$).

§ 9. ОДНОРОДНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Векторы Киллинга и потенциалы

Если в выражении (8.89) для скаляра -1ψ , описывающего поле точечного заряда на оси симметрии, совершить предельный пере-

ход $r_0 \rightarrow \infty$, $e \rightarrow \infty$, сохраняя постоянным отношение

$$\frac{e}{r_0^2} = F_z = E_z + iB_z = \text{const}, \quad (1)$$

то мы получим конечную величину, соответствующую постоянным и однородным электрическому и магнитному полям, направленным вдоль оси симметрии

$$-{}_1\psi = \frac{\Delta \sin \theta F_z}{2\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Непосредственным интегрированием соотношения (8.61) с учетом равенства (8.10) находим потенциал Дебая

$$-{}_1\Xi = -\frac{F_z \Delta \sin \theta}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Далее с помощью формул (8.79), (8.80), получаем отличные от нуля компоненты комплексного 4-потенциала, генерирующего автодуальный бивектор $F_{\mu\nu}$,

$$\mathcal{A}_0 = F_z \rho [\Delta \cos \theta + ia(r-M) \sin^2 \theta], \quad (4)$$

$$\mathcal{A}_3 = -a\mathcal{A}_0 \sin^2 \theta - iF_z \sin^2 \theta ((r-M)\rho^{*-1} + \Delta/2). \quad (5)$$

Можно показать, что эти величины тесно связаны с векторными полями Киллинга пространства-времени Керра. Рассмотрим случай чисто магнитного поля $F_z = iB_z$. Тогда действительные части (4) и (5) равны

$$A_0 = aB \left(1 - \frac{Mr}{\Sigma} (1 + \cos^2 \theta) \right); \quad A_3 = -\frac{B \sin^2 \theta}{2} \left(r^2 + a^2 - \frac{2Mr a^2 (1 + \cos^2 \theta)}{\Sigma} \right). \quad (6)$$

В этих выражениях нетрудно узнать линейную комбинацию компонент 1-форм Киллинга $\xi^{(t)}$ и $\xi^{(\varphi)}$:

$$A_\mu = B \left(a\xi_\mu^{(t)} + \frac{1}{2}\xi_\mu^{(\varphi)} \right), \quad (7)$$

факт, отмеченный Уолдом [142]. Это неудивительно, так как векторные поля Киллинга удовлетворяют в случае вакуумных метрик тем же уравнениям, что и 4-потенциал свободного электромагнитного поля в калибровке Лоренца (8.81). Действительно, свободные уравнения Максвелла в лоренцевой калибровке имеют вид

$$A_{;\nu}^{\mu;\nu} - R_\nu^\mu A^\nu = 0, \quad (8)$$

с другой стороны, из уравнений Киллинга $\xi_{;\nu}^\mu + \xi_\nu^\mu = 0$ находим

$$\xi_{;\nu}^{\mu;\nu} + R_\nu^\mu \xi^\nu = 0. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9), очевидно, совпадают при $R_{\mu\nu}=0$ [143], таким образом, векторы Киллинга можно рассматривать как 4-потенциалы некоторых свободных (бестоковых) максвелловских полей. Заметим, что для нахождения коэффициентов в линейной комбинации (7) можно воспользоваться формулами (2.57), (2.58), выражающими полную массу и заряд черной дыры в виде поверхностных интегралов. Представляя потенциал в виде

$$A^\mu = \alpha \xi_{(t)}^\mu + \beta \xi_{(\varphi)}^\mu, \quad (10)$$

где α и β — постоянные, вычислим интеграл

$$-\oint F^{\mu\nu} d\Sigma_{\mu\nu} = 2\alpha \oint \xi_{(t)}^{[\mu;\nu]} d\Sigma_{\mu\nu} + 2\beta \oint \xi_{(\varphi)}^{[\mu;\nu]} d\Sigma_{\mu\nu}. \quad (11)$$

Левая часть этого равенства равна $4\pi Q$, где Q — полный электрический заряд системы, а интегралы в правой части пропорциональны массе и угловому моменту черной дыры. В результате получаем уравнение

$$Q = (4\beta\alpha - 2\alpha)M, \quad (12)$$

откуда при $Q=0$ находим отношение коэффициентов α и β , совпадающее с соответствующим отношением в (7). Таким образом, линейная комбинация векторов Киллинга в общем случае генерирует суперпозицию однородного магнитного поля, направленного вдоль оси симметрии черной дыры и кулонова поля [144]:

$$A^\mu = \frac{1}{2} B (\xi_{(\varphi)}^\mu + 2a \xi_{(t)}^\mu) - \frac{Q}{2M} \xi_{(t)}^\mu. \quad (13)$$

Вращение черной дыры в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси симметрии, приводит, благодаря фарадеевской индукции (см. § 2), к возникновению разности потенциалов между горизонтом событий и бесконечно удаленной точкой. Из выражения (13) видно, что на бесконечности $A_0 = -(Q - 2aMB)/2M$, в то время как электростатический потенциал горизонта (8.87) равен нулю. Таким образом, разность потенциалов

$$\Delta\mathcal{V} = \mathcal{V}_H - A_0|_{r \rightarrow \infty} = \frac{Q - 2aMB}{2M} \quad (14)$$

остается конечной и при отсутствии электрического заряда ($Q=0$). Заметим, что с помощью калибровочного преобразования

$$A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\left(\frac{Q - 2aMB}{2M} \right) t \right] \quad (15)$$

потенциал приводится к кулоновой форме ($A_0|_{r \rightarrow \infty} = 0$). При этом $\mathcal{V}_H = (Q - 2aMB)/2M$ и разность потенциалов (14), разумеется, остается прежней. В кулоновой калибровке потенциал (15) сингулярен на горизонте событий $\tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu|_{r \rightarrow r_+} \rightarrow \infty$, однако это не при-

водит к затруднениям, поскольку потенциал не является наблюдаемой величиной. Возникновение разности потенциалов между бесконечностью и горизонтом событий черной дыры, вращающейся в однородном магнитном поле, делает энергетически выгодной аккрецию заряда соответствующего знака [142] при наличии вокруг черной дыры плазмы. Процесс прекратится, когда аккрецированный заряд достигает величины

$$Q = 2aMB, \quad (16)$$

при которой $\Delta\mathcal{U} = 0$. Аналогичный эффект имеет место и для проводящей сферы, вращающейся в магнитном поле [158].

Заметим, что ни в одной системе отсчета поле не является чисто магнитным даже при $Q = 0$. Действительно, максвелловский тензор, соответствующий скалярам Ньюмена—Пенроуза поля (6)

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= -\frac{iB}{\sqrt{2}} \sin \theta; \quad \Phi_2 = \frac{iB \sin \theta \Delta \rho^2}{2\sqrt{2}}; \\ \Phi_1 &= \frac{iB}{2} \rho^2 [(a^2 - r^2) \cos \theta + ia(r - M)(1 + \cos^2 \theta)], \end{aligned} \quad (17)$$

имеет псевдоскалярный инвариант

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{B^2 a \cos \theta}{\Sigma^2} \left\{ \Delta r \sin^2 \theta + \left[(r^2 - a^2) \left(\frac{2r^2}{\Sigma} - 1 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2a^2 r (r - M)(1 + \cos^2 \theta)}{\Sigma} \right] \left[\frac{2r(r^2 - a^2)}{\Sigma} \cos^2 \theta - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (r - M) \left(\frac{2r^2}{\Sigma} - 1 \right) (1 + \cos^2 \theta) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

В локально-лоренцевой системе отсчета он равен скалярному произведению векторов электрического и магнитного полей. Заряженные частицы плазмы, движущиеся вдоль силовых линий магнитного поля, будут втягиваться в дыру или уходить на бесконечность в зависимости от знака инварианта (18). Исследование этого выражения показывает, что для $a > 0$, $B > 0$ положительно заряженные частицы будут преимущественно аккрецироваться в полярных областях, а отрицательные — в относительно узкой области вокруг экватора [75].

Компоненты однородного магнитного поля в локально невращающейся системе отсчета равны

$$\begin{aligned} B_{\hat{r}} &= b \cos \theta [(r^2 + a^2)(\rho_1 \rho_2 - 2a^2 r \rho_3) - a^2 \Delta \Sigma \sin^2 \theta], \\ B_{\hat{\theta}} &= -b \sqrt{\Delta} \sin \theta [a^2 (2r \rho_1 \cos^2 \theta - \rho_2 \rho_3) + (r^2 + a^2) \Sigma r], \\ E_{\hat{r}} &= -ab [(r^2 + a^2)(2r \rho_1 \cos^2 \theta - \rho_2 \rho_3) + r \Delta \Sigma \sin^2 \theta], \end{aligned} \quad (19)$$

$$E_{\hat{\theta}} = -ab\sqrt{\Delta} \sin \theta \cos \theta [(\rho_1 \rho_2 + 2a^2 r \rho_3) - (r^2 - a^2) \Sigma],$$

где $\rho_1 = r^2 - a^2$, $\rho_2 = r^2 - a^2 \cos^2 \theta$, $\rho_3 = (r - M)(1 + \cos^2 \theta)$, $b = B \Sigma^{-2} A^{-1/2}$. При $a = 0$ электрическое поле исчезает, а компоненты магнитного принимают простой вид

$$B_{\hat{r}} = -F_{\hat{\theta}\hat{\varphi}} = B \cos \theta; \quad B_{\hat{\theta}} = F_{\hat{r}\hat{\varphi}} = -B \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \sin \theta. \quad (20)$$

На горизонте событий тангенциальная составляющая магнитного поля обращается в нуль.

Модель вращающейся черной дыры, погруженной в однородное магнитное поле, в последнее время привлекла большой интерес в астрофизике [145—151]. В этой модели существенно используется факт существования индукционной разности потенциалов (14).

Совершенно аналогично строится решение для асимптотики однородного электрического поля, направленного вдоль оси симметрии черной дыры. Вектор-потенциал, генерирующий дуальный

тензор $\hat{F}_{\mu\nu} = 2A'_{[\nu, \mu]}$, получается как мнимая часть (4), (5) при $F_z = E$ и совпадает с линейной комбинацией форм Киллинга

$$A'_\mu = -E \left(a \xi_\mu^{(t)} + \frac{1}{2} \xi_\mu^{(\varphi)} \right). \quad (21)$$

Повторяя рассуждения, которые привели к выражению (14) для разности электростатических потенциалов, найдем, что при вращении черной дыры, обладающей монопольным зарядом P в однородном электрическом поле, параллельном оси симметрии, возникает разность магнитостатических потенциалов между горизонтом и бесконечностью

$$\Delta \mathcal{V}_{(m)} = \text{Im } \mathcal{V} = A'_0|_{r \rightarrow \infty} = \frac{P + 2aME}{2M}. \quad (22)$$

Компоненты электрического и магнитного полей в локально невращающейся системе отсчета можно получить из (19), (20) с помощью дуального поворота.

Асимметричное скрещенное поле

Представляет интерес рассмотреть случай однородного электромагнитного поля вокруг вращающейся черной дыры, не обладающего аксиальной симметрией. Поскольку при учете влияния такого поля на метрику эта конфигурация не может быть строго стационарной, следует ожидать в этом случае возникновения подемоторных явлений. Построим потенциал Дебая для общего случая постоянных и асимптотически однородных электрического и магнитного полей. При $r \rightarrow \infty$ соответствующие скаляры Ньюмена—Пенроуза должны иметь вид

$$\Phi_0^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (F_\theta + iF_\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(F_z \sin \theta + F_{(-)} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} - \right. \\ \left. - F_{(+)} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \right),$$

$$\Phi_1^{(\infty)} = -\frac{1}{2} F_r = -\frac{1}{4} (2F_z \cos \theta + F_{(-)} \sin \theta e^{i\varphi} + F_{(+)} \sin \theta e^{-i\varphi}), \quad (23)$$

$$\Phi_2^{(\infty)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (-F_\theta + iF_\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(F_z \sin \theta - F_{(-)} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + \right. \\ \left. + F_{(+)} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \right),$$

где $F_{(\pm)} = F_x \pm iF_y$; $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$ и выбрана декартова система пространственных координат с осью z вдоль оси симметрии поля Керра. Нетрудно найти потенциал Дебая, порождающий поле (23) в соответствии с общими соотношениями

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \mathcal{D}_0^2 \Xi; \quad \Phi_2 = \frac{1}{4} \mathcal{L}_0^+ \mathcal{L}_{1-1}^+ \Xi;$$

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\mathcal{D}_0 \frac{\rho}{\rho^*} \mathcal{L}_1 + ia \frac{\rho}{\rho^*} (\rho + \rho^*) \sin \theta \mathcal{D}_0 \right) \rho_{-1}^* \Xi \quad (24)$$

(напомним, что при отсутствии аксиальной симметрии операторы \mathcal{L}_s и \mathcal{L}_s^+ различны). В асимптотической области $\rho = \rho^* = -r^{-1}$, и прямым вычислением можно убедиться в том, что формулы (23) воспроизводятся при выборе потенциала Дебая $_{-1}\Xi$ в виде

$$_{-1}\Xi^{(\infty)} = -\frac{r^2}{2\sqrt{2}} \left(F_z \sin \theta - F_{(+)} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + F_{(-)} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \right). \quad (25)$$

Необходимо теперь построить точное решение уравнения (5.38) для стационарного случая

$$(\Delta \mathcal{D}_0^+ \mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_0^+ \mathcal{L}_1)_{-1} \Xi = 0, \quad (26)$$

которое при $r \rightarrow \infty$ имело бы асимптотический вид (25). Для этого можно воспользоваться общим методом разделения переменных, изложенным в § 7. В стационарном случае ($\omega = 0$) сфероидальные гармоники сводятся к сферическим. Разложение (25) фактически представляет собой сумму трех спиновых сферических гармоник с $s=1$, $l=1$ и $m=0, \pm 1$:

$${}_1Y_{1m} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{m}{\sin \theta} \right) {}_0Y_{1m} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta} \right). \quad (27)$$

В соответствии с общим видом мод ${}_{-1}\Xi_{lm}$ (7.27) при $\omega=0$ (здесь мы не будем проводить явного разделения по четности) получим решение уравнения (26), согласующееся с (25), в форме

$${}_{-1}\Xi = \sum_{m=-1}^1 {}_{-1}\mathcal{R}_{1m1} Y_{1m}. \quad (28)$$

Радиальные функции, регулярные на горизонте событий при $\omega=0$, определяются формулами (7.128), что в нашем случае с точностью до нормировочных множителей дает

$${}_{-1}\mathcal{R}_{10} \propto \Delta; \quad {}_{-1}\mathcal{R}_{1\pm 1} \propto \Delta \left(\frac{r-r_+}{r-r_-} \right)^{\pm ia/(r_+-r_-)}. \quad (29)$$

Сопоставляя формулы (27)–(29) с асимптотическим видом потенциала Дебая (25), находим решение уравнения (26) в форме, аналогичной (25):

$${}_{-1}\Xi = -\frac{\Delta}{2\sqrt{2}} \left(F_z \sin \theta - F_{(+)} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + F_{(-)} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \right), \quad (30)$$

$$\varphi = \varphi + \frac{a}{r_+ - r_-} \ln \frac{r-r_+}{r-r_-}.$$

Это выражение является обобщением потенциала Дебая (3), найденного для полей, параллельных оси симметрии. Подставляя его в формулы (24), находим тетрадные проекции максвелловского тензора

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(F_z \sin \theta + \frac{\xi(\xi-M)}{\Delta} F_{(-)} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi^*(\xi^*-M)}{\Delta} F_{(+)} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \right), \\ \Phi_2 &= \frac{\Delta \rho^2}{2\sqrt{2}} \left(F_z \sin \theta - F_{(-)} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + F_{(+)} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \right), \\ \Phi_1 &= \frac{\rho^2}{2} \left\{ F_z [(a^2 - r^2) \cos \theta + ia(r-M)(1 + \cos^2 \theta)] + \right. \\ &\quad + F_{(-)} \sin \theta \left[ia(\xi-M) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\xi^2}{2} \right] e^{i\varphi} - \\ &\quad \left. - F_{(+)} \sin \theta \left[ia(\xi^*-M) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\xi^{*2}}{2} \right] e^{-i\varphi} \right\}, \quad (31) \end{aligned}$$

где $\xi = r + ia$. В выражениях для Φ_0 и Φ_2 можно узнать разложения по спиновым сферическим гармоникам веса $s=1$ и $s=-1$

с $l=1$. Альтернативный путь получения этих формул состоит в отыскании решений уравнений Тьюкольского для Φ_0 и Φ_2 , сшитых с асимптотиками (23), и последующем построении Φ_1 исходя непосредственно из уравнений Максвелла.

Сила, действующая на черную дыру

Если вектор Пойнтинга внешнего электромагнитного поля отличен от нуля и не направлен по оси симметрии черной дыры, то поглощение черной дырой импульса поля должно быть асимметричным. В силу глобального сохранения импульса на черную дыру при этом будет действовать некоторая сила, квадратично зависящая от напряженности поля. Для расчета эффекта можно воспользоваться приемом Пресса [152]. Представим себе, что электромагнитное поле создается токами, текущими по сферической оболочке радиуса $r_0 \gg r_+$. Сила, с которой электромагнитное поле действует на оболочку, будет равна и противоположна по направлению силе, действующей на черную дыру. С другой стороны, действующая на оболочку сила определяется картиной скалярного и векторного потенциалов лишь вблизи нее, а эта картина та же, что и для черной дыры с зарядом, создающим эквивалентную разность потенциалов между горизонтом и бесконечностью.

Следуя этим рассуждениям, указанный подемоторный эффект удастся рассчитать точно. Представим себе, что стационарное электромагнитное поле, описываемое скалярами Ньюмена—Пенроуза (31), создается некоторым распределением электрического j_E^μ и магнитного j_M^μ токов, текущих по сферической поверхности радиуса $r_0 \gg r_+$, так что вне этой поверхности поле отсутствует (это, разумеется, возможно лишь при $j_M^\mu \neq 0$). Соответствующее распределение комплексного тока $j^\mu = j_E^\mu + ij_M^\mu$ найдем, подставляя в уравнения Максвелла (5.10) комплексный бивектор

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = 2 \{ \Phi_0 m_{[\mu} n_{\nu]} + \Phi_1 (n_{[\mu} l_{\nu]} + m_{[\mu} m_{\nu]}) + \Phi_2 l_{[\mu} m_{\nu]} \} \theta(r_0 - r), \quad (32)$$

где величины Φ_0 , Φ_1 и Φ_2 задаются формулами (31). Дифференцируя (32), находим

$$j^\mu = 1/2\pi \mathcal{F}^{\mu 1} \delta(r - r_0), \quad (33)$$

где индекс 1 обозначает радиальную компоненту в координатах Бойера—Линдквиста. Плотность действующей на оболочку силы вычисляется как произведение полусуммы внутреннего и внешнего полей (т. е. в нашем случае половины внутреннего поля) на соответствующие токи:

$$\mathcal{F}^\mu = 1/2 (\mathcal{F}_\nu^\mu j_E^\nu + \mathcal{F}_\nu^\mu j_M^\nu) = \text{Re} (\mathcal{F}_\nu^\mu j^{*\nu}), \quad (34)$$

или после подстановки (33)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\mu &= f^\mu \delta(r - r_0), \\ f^\mu &= 1/2\pi \text{Re} (\mathcal{F}_\nu^\mu \mathcal{F}^{\nu 1*}). \end{aligned} \quad (35)$$

Выразив комплексный бивектор через скаляры Ньюмена—Пенроуза, найдем

$$f^\mu = \frac{1}{2\pi} \left\{ |\Phi_1|^2 \left(\frac{\Delta}{2\Sigma} l^\mu - n^\mu \right) + \operatorname{Re} \left[\Phi_1^* \left(2\Phi_2 m^\mu - \frac{\Delta}{\Sigma} \Phi_0 m^{*\mu} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\Delta}{2\Sigma} |\Phi_0|^2 n^\mu - |\Phi_2|^2 l^\mu \right\}. \quad (36)$$

Введем «декартову» тетраду, ассоциируемую с локально статической системой отсчета

$$e_{(t)\mu} dx^\mu = [\Sigma (\Sigma - 2Mr)]^{-1/2} [(\Sigma - 2Mr) dt + 2Mr a \sin^2 \theta d\varphi], \\ e_{(x)\mu} dx^\mu = \sqrt{\Sigma} [(\sin \theta dr / \sqrt{\Delta} + \cos \theta d\theta) \cos \varphi - \\ - \sqrt{\Delta/(\Sigma - 2Mr)} \sin \theta \sin \varphi d\varphi], \\ e_{(y)\mu} dx^\mu = \sqrt{\Sigma} [(\sin \theta dr / \sqrt{\Delta} + \cos \theta d\theta) \sin \varphi + \\ + \sqrt{\Delta/(\Sigma - 2Mr)} \sin \theta \cos \varphi d\varphi], \\ e_{(z)\mu} dx^\mu = \sqrt{\Sigma} (\cos \theta dr / \sqrt{\Delta} - \sin \theta d\theta). \quad (37)$$

Ориентация осей x, y, z не зависит от положения точки на поверхности сферы, находящейся в асимптотически плоской области $r_0 \gg r_+$, и совпадает с ориентацией декартовой системы координат покоящегося на бесконечности наблюдателя, с осью z вдоль оси симметрии черной дыры. Проектируя плотность силы (36) на пространственные векторы тетрады и интегрируя по объему, получим пространственные (декартовы) компоненты силы, действующей на оболочку

$$g_i = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \oint_{r_0} f_\mu e_{(i)}^\mu d\omega^{(0)} \wedge d\omega^{(\varphi)} = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \oint_{r_0} G_i \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (38)$$

$$i = x, y, z,$$

где $d\omega^{(0)} = \sqrt{\Sigma} d\theta$, $d\omega^{(\varphi)} = \sqrt{\Delta/\Sigma} \sin \theta d\varphi$. Подставляя в (36) асимптотические разложения для скаляров Ньюмена—Пенроуза, найдем, что два первых члена в G_i расходятся при $r_0 \rightarrow \infty$ как r_0^2 и r_0 , третий член не зависит от r_0 , четвертый убывает как r_0^{-1} , все остальные убывают быстрее и в рассматриваемой задаче не существенны:

$$G = G^{(1)}(\theta, \varphi) r_0^2 + G^{(2)}(\theta, \varphi) r_0 + G^{(3)}(\theta, \varphi) + \frac{1}{r_0} G^{(4)}(\theta, \varphi) + O\left(\frac{1}{r_0^2}\right). \quad (39)$$

Первый и второй члены описывают силы, деформирующие обо-

лочку; соответствующие вклады исчезают в результате интегрирования по углам

$$\oint G^{(1)} \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad \oint G^{(2)} \sin \theta d\theta d\varphi = 0.$$

При вычислении действующей на черную дыру силы существенным является третий член в (39). В результате громоздких преобразований получаем в линейном приближении по a

$$G_x^{(3)} + iG_y^{(3)} = \frac{aM}{8\pi} e^{i\varphi} [\cos^2 \theta \operatorname{Re}(iF_z^* R_+) - i(1 + 2\cos^2 \theta) \operatorname{Re} F_z^* R_-],$$

где $R_{\pm} = F_+ e^{-i\varphi} \pm F_- e^{i\varphi}$, причем $G_z^{(3)} = 0$, что после интегрирования приводит к результату

$$g_x + ig_y = 2/3 iaM (F_z^* F_+ - F_z F_-^*). \quad (40)$$

Как видно из этих формул, сила, действующая на оболочку, пропорциональна моменту вращения черной дыры и квадратична по напряженностям внешнего поля. Аналогичным способом можно вычислить и «обычную» силу, действующую на (слабо) заряженную черную дыру во внешнем однородном электромагнитном поле. Соответствующая плотность силы получается в результате свертывания комплексного бивектора

$$\mathcal{F}_Q^{\mu\nu} = (Q + iP) \rho^2 (m^{[\nu} m^{*\mu]} + l^{[\mu} n^{\nu]}), \quad (41)$$

отвечающего кулонову полю заряда $Q + iP$ с плотностью токов, текущих по оболочке, что приводит вместо (35) к выражению

$$f_Q^\mu = 1/\pi \operatorname{Re} (\mathcal{F}_Q^{\mu\nu} \mathcal{F}_\nu^{1*}) \quad (42)$$

(отсутствие коэффициента $1/2$ обусловлено тем, что кулоново поле не имеет разрыва при $r = r_0$). Подставляя сюда разложение (32) для \mathcal{F}^{1*} , находим

$$f_Q^\mu = \frac{(Q + iP)}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \rho^2 \left[\Phi_1 \left(n^\mu - \frac{\Delta}{2\Sigma} l^\mu \right) - \Phi_2 m^\mu - \frac{\Delta}{2\Sigma} \Phi_0 m^{*\mu} \right] \right\}. \quad (43)$$

Это выражение нужно подставить в (38) и выполнить интегрирование по углам. Вычисления полностью аналогичны приведенным выше; при этом оказывается, что в пределе $r_0 \rightarrow \infty$ интегралы конечны и сводятся к ожидаемому результату

$$g_i^{(Q)} = -QE_i - PB_i. \quad (44)$$

В силу глобального сохранения импульса равная и противоположно направленная сила будет приложена к черной дыре. Объединяя (40) и (44) и переходя к векторной форме записи (трехмерные векторы отнесены к асимптотически декартовой системе

координат, в которой заданы \mathbf{E} и \mathbf{B}), находим для силы, действующей на вращающуюся заряженную черную дыру в постоянном и однородном электромагнитном поле, выражение

$$\mathbf{f}_{\text{BH}} = \mathbf{f}_Q + \mathbf{f}_I; \quad \mathbf{f}_Q = Q\mathbf{E} + P\mathbf{B}; \quad \mathbf{f}_I = 4/3[\mathbf{J} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{E}]]. \quad (45)$$

Первое слагаемое соответствует ожидаемому (но требующему доказательства, альтернативный вывод см. в [137]) результату — на заряженную черную дыру в электрическом поле действует такая же сила, что и на точечный заряд. Второе слагаемое можно интерпретировать, используя соображения об индукционной разности потенциалов в магнитном (14) и электрическом (22) полях. Действительно, переписав \mathbf{f}_I в виде

$$\mathbf{f}_I = 2/3[-2(\mathbf{J} \cdot \mathbf{B})\mathbf{E} + 2(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E})\mathbf{B}], \quad (46)$$

нетрудно заметить, что первый член пропорционален силе, действующей на фиктивный электрический заряд $Q' = -2aMB_z$ (14) (создающий эквивалентную разность потенциалов) со стороны электрического поля \mathbf{E} , второй — силе, действующей на фиктивный магнитный заряд $P' = 2aME_z$ (22) в магнитном поле \mathbf{B} . При этом компоненты указанных сил в направлении оси симметрии черной дыры взаимно уничтожаются.

Отметим еще одну возможную форму записи силы \mathbf{f}_I

$$\mathbf{f}_I = -16/3\pi[\mathbf{J} \times \mathbf{S}], \quad (47)$$

где $\mathbf{S} = 1/4\pi[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ — вектор Пойнтинга внешнего электромагнитного поля. Это выражение можно понимать как описывающее взаимодействие моментов количества движения черной дыры и электромагнитного поля.

Потеря углового момента

Пользуясь тем же методом, можно вычислить момент силы, действующей на черную дыру во внешнем электромагнитном поле. Согласно теореме Хокинга [25, 21], при вращении черной дыры во внешнем поле любой природы, не обладающем аксиальной симметрией, возникает явление, аналогичное приливному трению, в результате чего черная дыра теряет угловой момент. Если внешнее поле само обладает осью симметрии (не совпадающей с осью симметрии черной дыры), то происходит потеря проекции момента на плоскость, перпендикулярную оси симметрии внешнего поля [152—154], т. е. ось вращения черной дыры как бы поворачивается вплоть до совмещения с осью симметрии поля. Здесь мы рассмотрим общий случай однородных электрического и магнитного полей, произвольно ориентированных в пространстве. Такое внешнее поле уже не обладает аксиальной симметрией (за исключением коллинеарной конфигурации), поэтому можно ожидать, что черная дыра будет полностью терять свой момент вращения.

Ограничиваясь случаем медленного вращения ($a \ll M$), вычислим момент силы, действующей на токнесущую оболочку, создающую однородное поле (32) внутри нее. Оказывается, что при учете лишь линейных членов по параметру вращения a ненулевой (конечный) при $r_0 \rightarrow \infty$ вклад в декартовы компоненты плотности силы $f_{\mu} e_{(i)}^{\mu} \equiv f_i^{(3)}$ дают лишь члены разложения порядка r^{-3} . Поэтому при вычислении момента силы можно воспользоваться формулой, справедливой в плоском пространстве

$$\mathbf{N} = \oint_{r_0} (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{f}^{(3)}) r_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (48)$$

где под \mathbf{r}_0 понимается трехмерный вектор с компонентами

$$\mathbf{r}_0 = r_0 (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad (49)$$

отнесенный к асимптотической декартовой системе координат. В результате вычисления интеграла (48) в пределе $r_0 \rightarrow \infty$ находим

$$\begin{aligned} N_x &= 2/3 JM (B_z B_x + E_z E_x), \\ N_y &= 2/3 JM (B_z B_y + E_z E_y), \\ N_z &= 2/3 JM (\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2 - B_z^2 - E_z^2). \end{aligned} \quad (50)$$

Равный и противоположно направленный момент силы приложен к черной дыре. Результирующее уравнение для изменения углового момента дыры можно написать в трехмерном векторном виде

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = -\frac{2M}{3} ([\mathbf{B} \times [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] + [\mathbf{E} \times [\mathbf{J} \times \mathbf{E}]]). \quad (51)$$

При $\mathbf{E} = 0$ и выборе направления декартовых осей так, что $B_y = 0$, получаем уравнения, рассмотренные в [155—156]

$$\frac{dJ_x}{dt} = -\frac{2}{3} MB_x B_z; \quad \frac{dJ_z}{dt} = -\frac{2}{3} MB_x^2; \quad \frac{dJ_y}{dt} = 0, \quad (52)$$

из которых следует

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{B} = \text{const}, \quad J_1 = J_{10} e^{-t/\tau}, \quad (53)$$

где время затухания поперечной к \mathbf{B} компоненты момента J_1 равно

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{1}{B^2 M} = \frac{3}{2} M \left(\frac{B_M}{B} \right)^2. \quad (54)$$

В рассматриваемом нами более общем случае, как следует из уравнения (51), проекция $\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}$ (так же как и проекция на любой другой вектор) уже не является интегралом движения (за исклю-

чением случая коллинеарных полей \mathbf{E} и \mathbf{B}). Для решения уравнения (51) перейдем к матричной записи

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = -\mathbf{T} \cdot \mathbf{J}, \quad (55)$$

где \mathbf{T} — матрица 3×3 с компонентами

$$T_{ij} = \frac{2M}{3} [(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \delta_{ij} - B_i B_j - E_i E_j]. \quad (56)$$

Покажем, что эта матрица не вырождена и положительно определена, за исключением случая коллинеарных \mathbf{E} и \mathbf{B} . Действительно, соответствующая квадратичная форма имеет вид

$$T_{ij} \xi_i \xi_j = \frac{2M}{3} \xi^2 (\mathbf{E}^2 \sin^2 \theta_E + \mathbf{B}^2 \sin^2 \theta_B), \quad (57)$$

где θ_E и θ_B — углы между векторами \mathbf{E} , ξ и \mathbf{B} , ξ соответственно. Выражение (57) неотрицательно, причем его обращение в нуль возможно лишь, если $\sin \theta_E$ и $\sin \theta_B$ равны нулю одновременно, т. е. при коллинеарных \mathbf{E} и \mathbf{B} .

Найдем далее собственные значения матрицы \mathbf{T} , обозначая их через $1/\tau_a$ ($a=1, 2, 3$). Уравнение на собственное значение с учетом (56) можно записать в виде

$$(B_i B_j - E_i E_j) \xi_j^{(a)} = \left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 - \frac{3}{2M\tau_a} \right) \xi_i^{(a)}, \quad (58)$$

где $\xi_i^{(a)}$ — собственные векторы. Из этой формулы очевидно, что одним из собственных векторов будет вектор Пойнтинга внешнего поля ($a=3$); при этом левая часть (58) обращается в нуль, и для собственного значения получаем

$$\tau_3 = \frac{3}{2} M \frac{B_M^2}{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}. \quad (59)$$

Два других собственных вектора, следовательно, лежат в плоскости, образуемой \mathbf{E} и \mathbf{B} . Умножая (58) поочередно на E_i и B_i , находим систему уравнений для проекций $(\mathbf{E} \cdot \xi^{(a)})$, $(\mathbf{B} \cdot \xi^{(a)})$ ($a=1, 2$), разрешив которую получаем искомые собственные значения

$$\tau_{1,2} = 3M \frac{B_M^2}{(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \pm ((\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)^2 - 4[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]^2)^{1/2}} \quad (60)$$

(заметим, что выражение под корнем неотрицательно). В случае коллинеарных \mathbf{E} и \mathbf{B} , как видно из (60), матрица становится вырожденной: $1/\tau_2 = 0$, причем два других собственных значения совпадают. В случае взаимно перпендикулярных \mathbf{E} и \mathbf{B} $\tau_1 = \tau_2 =$

$=2\tau_3$. В общем случае для собственных значений матрицы \mathbf{T} имеет место соотношение

$$\frac{1}{\tau_3} \geq \frac{1}{\tau_1} \geq \frac{1}{\tau_2}. \quad (61)$$

Разложив вектор углового момента по собственным векторам матрицы \mathbf{T} , для соответствующих проекций $J_a = \mathbf{J} \cdot \xi^{(a)} / \sqrt{\xi^{(a)2}}$ будем иметь

$$J_a = J_{a0} e^{-t/\tau_a}. \quad (62)$$

Для коллинеарных \mathbf{E} и \mathbf{B} $\tau_2 = \infty$, $\tau_1 = \tau_3$, и мы возвращаемся к случаю (53). В случае взаимно перпендикулярных \mathbf{E} и \mathbf{B} черная дыра сначала теряет компоненту момента, ортогональную плоскости, образованной \mathbf{E} и \mathbf{B} (соответствующее время релаксации в 2 раза меньше), а затем компоненты, лежащие в одной плоскости с \mathbf{E} и \mathbf{B} . В общем случае релаксация углового момента подчиняется правилу (61).

Прецессия углового момента заряженной дыры в асимметричном поле

Если черная дыра заряжена, то, помимо описанной выше медленной релаксации спина, будет происходить прецессия со значительно более коротким характерным временем. Для вычисления момента сил нужно вычислить интеграл типа (48), подставляя в качестве силы выражение (43). В пределе $r_0 \rightarrow \infty$ получаем [141]

$$N_x = \frac{a}{M} (QB_y + PE_y), \quad N_y = -\frac{a}{M} (QB_x + PE_x), \quad N_z = 0, \quad (63)$$

что соответствует изменению момента вращения черной дыры согласно

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{1}{M} [(\mathbf{QB} + \mathbf{PE}) \times \mathbf{J}]. \quad (64)$$

Это уравнение описывает прецессию вектора \mathbf{J} во внешнем электромагнитном поле — первое слагаемое отвечает прецессии магнитного момента

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{Q}{M} \mathbf{J} \quad (65)$$

во внешнем магнитном поле, второе — прецессии электрического дипольного момента

$$\mathbf{d} = \frac{P}{M} \mathbf{J} \quad (66)$$

в электрическом поле. Таким образом, магнитный (электрический) момент вращающейся черной дыры, обладающей электрическим (магнитным) зарядом, можно обнаружить не только по

характеру собственного поля дыры, но и по ее поведению во внешнем поле.

Для слабозаряженной ($Q=10^{-5}$ М) черной дыры солнечной массы в магнитном поле $B \sim 10^{12}$ Гс период прецессии будет порядка года. Если же внешнее магнитное поле создается аккреционным диском, обладающим значительно меньшим угловым моментом, то прецессию будет испытывать момент вращения диска с частотой

$$\Omega_{\text{диск}} = \Omega_{\text{дыра}} J/J_{\text{диск}}. \quad (67)$$

Для наблюдения эффекта необходимо, чтобы время жизни диска было достаточно велико, это накладывает сильные ограничения на параметры системы, более реалистические оценки эффекта сделаны в [315].

ИЗЛУЧЕНИЕ ЧАСТИЦ, ДВИЖУЩИХСЯ ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ

В этой главе рассматривается излучение волн различной природы (скалярных, электромагнитных и гравитационных) частицами, движущимися в окрестности черных дыр по геодезическим траекториям. Особенностью процесса излучения в гравитационном поле является его глобальный характер: поток излучения на бесконечности в асимптотически плоском пространстве зависит не только от ускорения частицы, но и поведения гравитационного поля во всем пространстве, поскольку поле излучения так же подвержено действию гравитационных сил, как и сама частица. В этом можно усмотреть различие с электромагнитным излучением заряда в пространстве Минковского, где, например, частица, движущаяся по окружности с постоянной скоростью в магнитном поле или поле кулоновского центра, излучает совершенно одинаково (именно поэтому формула Шотта, полученная для описания излучения электрона в атоме, была успешно применена для описания излучения электронов в ускорителях). В противоположность этому частицы, движущиеся по окружности с одинаковой скоростью в гравитационных полях Шварцшильда и Керра, будут давать различные потоки излучения на бесконечности. Поэтому излучение частицы в гравитационном поле невозможно описать универсальной формулой, в которую входили бы лишь кинематические характеристики движения (скорость, ускорение), но задачу необходимо рассматривать глобально. Известное упрощение возникает для ультрарелятивистских частиц, испускающих преимущественно высокочастотные волны. Если длина волны много меньше характерного масштаба неоднородности гравитационного поля, то рассеяние излучения на неоднородностях последнего можно рассматривать в рамках геометрической оптики. Здесь, однако, имеет место существенное различие между излучением частиц, движущихся по геодезическим, т. е. под действием лишь гравитационных сил, и частиц, движущихся преимущественно под действием сил негравитационной природы. Этот вопрос подробнее обсуждается в гл. V.

§ 10. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОПРАВКИ К ГРАВИТАЦИОННОМУ ИЗЛУЧЕНИЮ ПРИ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

Гравитационное излучение системы двух гравитирующих материальных точек массами μ , M (считаем $\mu \ll M$), совершающих эллиптическое движение, было рассчитано Петерсом и Мэтьюсом

[160] в квадрупольном приближении. В спектре излучения имеются гармоники кеплеровой частоты $\omega_M = (M/d^3)^{1/2}$, полная интенсивность быстро растет с ростом эксцентриситета, при этом максимум в спектре смещается в область высоких гармоник. Основной вклад в излучение дает участок траектории вблизи перигенетра, когда ускорение максимально, однако величина ϵ не может быть слишком близка к единице, так как в этом случае частица попадает в область сильного поля и следует учитывать релятивистские поправки как в уравнениях движения, так и при расчете гравитационного излучения. Учитывая быстрый прогресс в технике гравитационно-волновых антенн [161, 163], представляется целесообразным вычислить эти поправки. В работе [164] они были найдены для случая $\mu \gg M$, когда можно рассматривать движение легкой частицы на фоне геометрии Керра. Оказывается, что уже в квадрупольном приближении в спектре излучения имеется тонкая структура: каждая спектральная линия $\omega = n\omega_M$ расщепляется на три линии, две из которых сдвинуты относительно основной на частоту прецессии полуосей эллипса. Релятивистские поправки дают еще четыре более слабых линии с интенсивностью порядка (M/d) по отношению к основным линиям.

Пост-ньютоновские поправки в переменных действии — угол

Для анализа спектрального распределения гравитационного излучения частицы, совершающей квазиэллиптическое движение в поле Керра, удобно воспользоваться переменными действии — угол. Прежде всего заметим, что при движении по орбитам, близким к ньютоновским, линейная скорость v , угловая скорость $\omega_\varphi = d\varphi/dt$, угловой момент и параметр

$$\Gamma = 1 - (E/\mu)^2, \quad (1)$$

где E — полная энергия частицы, имеют относительный порядок

$$v \propto \Gamma, \quad \omega_\varphi r \propto v, \quad \frac{M}{r} \propto v^2, \\ \omega_\varphi M \propto v^3, \quad \frac{\mu M}{L} \propto v, \quad \frac{L}{\mu r} \propto v. \quad (2)$$

Можно показать, что первые релятивистские поправки пропорциональны квадрату скорости частицы и не зависят от момента aM черной дыры. Поэтому для отыскания первых поправок достаточно ограничиться геометрией Шварцшильда (поправки на поглощение дырой будут рассмотрены отдельно).

С требуемой точностью решение уравнения Гамильтона — Якоби, описывающее движение в плоскости $\theta = \pi/2$, может быть представлено в виде

$$S = -Et + L\varphi + S_r(r), \quad (3)$$

где функция $S_r(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dS_r(r)}{dr} = \pm \mu \frac{\sqrt{\Gamma}}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \sqrt{(r-r_{\min})(r_{\max}-r)}, \quad (4)$$

где $r_{\min}=d(1-\varepsilon)$, $r_{\max}=d(1+\varepsilon)$ — точки поворота,

$$\varepsilon = (1+\Gamma) \left(1 + 2\Gamma - \frac{L^2\Gamma}{\mu^2 M^2}\right)^{1/2} \quad (5)$$

эксцентриситет,

$$d = \frac{M}{\Gamma} (1-\Gamma) \quad (6)$$

большая полуось эллипса. Введем переменные действия

$$I_\varphi = L, \\ I_r = \frac{1}{\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left| \frac{dS_r}{dr} \right| dr = \mu M \frac{1-2\Gamma}{\Gamma} - (L^2 - 6\mu^2 M^2)^{1/2} \quad (7)$$

и угловые переменные

$$\omega_r = \left(\frac{\partial S_0}{\partial I_r} \right)_{L=\text{const}} = \pm \left(\arccos \frac{d-r}{re} - \frac{1-3\frac{M}{d}}{d} \sqrt{(r-r_{\min})(r_{\max}-r)} - \pi \right), \quad (8) \\ \omega_\varphi = \left(\frac{\partial S}{\partial I_\varphi} \right)_{I_r=\text{const}} = \varphi + \frac{L}{(L^2 - 6\mu^2 M^2)^{1/2}} \left[W_r \pm \arccos \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \Gamma - \frac{L^2(1+\Gamma) - 6\mu^2 M^2}{\mu^2 M(r-M)} \right) \right) \right].$$

В новых переменных уравнения движения будут иметь вид

$$I_r = 0, \quad I_\varphi = 0, \\ \dot{I}_r = \frac{\partial E(I_r, I_\varphi)}{\partial I_r}, \quad \dot{I}_\varphi = \frac{\partial E(I_r, I_\varphi)}{\partial I_\varphi}, \quad (9)$$

откуда

$$\omega_r = \omega_r t + \text{const}, \quad \omega_\varphi = \omega_\varphi t + \text{const} \quad (10)$$

и соответствующие частоты равны

$$\omega_r = \sqrt{\frac{M}{d^3}} \left(1 - \frac{3M}{d}\right), \quad \omega_\varphi = \sqrt{\frac{M}{d^3}} \left(1 + \frac{3M\varepsilon^2}{d(1-\varepsilon^2)}\right). \quad (11)$$

Всякая однозначная функция F координат частицы является периодической функцией угловых переменных ω_r , ω_φ с периодом 2π по каждой из них и может быть разложена в ряд Фурье

$$F = \sum_{n_r=-\infty}^{\infty} \sum_{n_\varphi=-\infty}^{\infty} A_{n_r n_\varphi} e^{-i(n_r \omega_r + n_\varphi \omega_\varphi)}, \quad (12)$$

где n_r, n_φ — целые числа. Каждый из членов этой суммы есть периодическая функция времени, изменяющаяся с частотой

$$\omega_{n_r n_\varphi} = n_r \omega_r + n_\varphi \omega_\varphi. \quad (13)$$

Поскольку эти частоты, вообще говоря, не находятся в кратном отношении, сумма в целом не является строго периодической функцией, а траектория не будет замкнутой, т. е. движение является условно-периодическим.

С требуемой точностью решения уравнений движения можно записать в параметрическом виде

$$\begin{aligned} r_p &= d(1 - \varepsilon \cos \xi), \\ \varphi_p &= \pm \left(1 + \frac{3M}{d(1 - \varepsilon^2)} \right) \arccos \frac{\left(1 - \frac{M}{d} \right) \cos \xi - \varepsilon}{1 - \frac{M}{d} - \varepsilon \cos \xi}, \\ \omega_r t &= \xi - \varepsilon \left(1 - 3 \frac{M}{d} \right) \sin \xi, \end{aligned} \quad (14)$$

что соответствует траектории типа розетки Зоммерфельда — эллипса, полуоси которого вращаются с частотой

$$\Omega = \omega_\varphi - \omega_r = \frac{3M}{d(1 - \varepsilon^2)} \sqrt{\frac{M}{d^3}}. \quad (15)$$

Тонкая структура спектра излучения

Для расчета спектральной интенсивности гравитационного излучения, уходящего на бесконечность, достаточно найти асимптотический вид тетрадной проекции ψ_4 тензора Вейля (§ 7). В силу малости величины $a\omega$ можно в качестве угловых функций взять спиновые сферические гармоники (Д.16). Учитывая периодический характер зависимости величин, описывающих движение, от угловых переменных ω_r и ω_φ , представим ψ_4 в виде разложения

$$\psi_4 = \rho^{-4} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n_r=-\infty}^{\infty} \sum_{n_\varphi=-\infty}^{\infty} {}_{-2}Y_{lm}(\theta, \varphi) R_{lm}^{n_r n_\varphi} e^{-in_r \omega_r + in_\varphi \omega_\varphi}. \quad (16)$$

Как видно из формулы (8), разность $\omega_\varphi - \omega_r$ зависит только от ω_r , следовательно, члены, для которых $m \neq n_\varphi$, должны обращаться в нуль. Переходя к индексу суммирования $n = n_r + m$, интенсивность гравитационного излучения получим в виде

$$I = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{r^2}{4\pi\omega_{nm}^2} |-{}_2R_{lmn}(r)|^2 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{nm}, \quad (17)$$

где $\omega_{nm} = n\omega_r + m\Omega$ и $R_{lm}^{n\varphi} = \delta_{n\varphi m} R_{lmn}$. Таким образом, в спектральном разложении интенсивности излучения вместо ряда по гармоникам кеплеровой частоты имеется двойной ряд по частотам ω_{nm} , что отвечает расщеплению каждой спектральной линии с номером n на компоненты тонкой структуры, характеризующиеся числом m . Релятивистские поправки порядка v^2 полностью содержатся в мультиполях $l=2, 3$. Поскольку $|m| \leq l$, ясно, что с рассматриваемой точностью каждая гармоника кеплеровой частоты $n\omega_r$ будет расщепляться на семь компонент тонкой структуры с $m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Для построения радиальных функций R_{lmn} нужно решить радиальное уравнение (7.86) с источником ${}_2T_{lmn}$, в выражение (7.85) для которого следует подставить тензор энергии-импульса точечной частицы.

$$T^{\mu\nu} = \frac{\mu}{r_p^2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{dt} \delta(r - r_p(t)) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \delta(\varphi - \varphi_p(t)), \quad (18)$$

где $r_p(t)$, $\varphi_p(t)$ — координаты частицы, движущейся по траектории (10.22). Радиальные функции R^{in} и R^{up} при этом следует вычислить в длинноволновом приближении более точно, чем в § 7. Вычисления приводят к результатам для $l=2$:

$$R_{2m}^{in}(r) = -\frac{i}{5!} \sqrt{\frac{2}{|\omega|}} \omega^5 (r-2M)^4 \left(\frac{2i(r-2M)\omega}{3} - \frac{11}{42} \omega^2 (r-2M)^2 + \frac{r+2M}{r-2M} \right). \quad (19)$$

При $l=3$ радиальная функция содержит дополнительный множитель $\omega r \propto v$, поэтому достаточно использовать решение, полученное в § 7, которое с нужной нам точностью имеет вид

$$R_{3m}^{in}(r) = -\frac{i}{5!} \sqrt{\frac{2}{|\omega|}} \frac{\omega^6 r}{21} (r-2M)^4. \quad (20)$$

Оставляя члены основного порядка для каждой гармоники, найдем

$$I_{nm} = \mu^2 M^3 d^{-5} \tilde{I}_{nm}, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{n0} &= \frac{4}{15} n^2 J_n^2; \quad \tilde{I}_{n,\pm 1} = \frac{1}{420} \frac{M}{d} [83n^2(1-\varepsilon^2) \mp 20n \sqrt{1-\varepsilon^2} + \\ &+ 12] n^2 \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} J_n \pm J_n' \right)^2, \end{aligned}$$

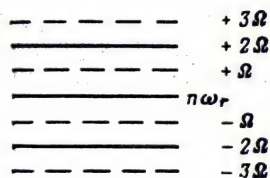
$$I_{n\pm 2}^{\infty} = \frac{8}{5} \left\{ \left[\frac{\varepsilon^2 - 2}{2} \pm n(1 - \varepsilon^2)^{3/2} \right] \frac{n}{\varepsilon^2} J_n + (n \sqrt{1 - \varepsilon^2} \mp 1) \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} J_n' \right\}^2, \quad (21)$$

$$I_{n\pm 3}^{\infty} = \frac{M}{84d} \left\{ \left[2(4 - \varepsilon^2) + 4n^2(1 - \varepsilon^2)^2 \pm (5\varepsilon^2 - 12)n \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right] \times \right. \\ \times \frac{n \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^3} J_n + [(7\varepsilon^2 - 12)n \sqrt{1 - \varepsilon^2} \pm 4n^2(1 - \varepsilon^2)^2 \pm \\ \left. \pm 2(4 - 3\varepsilon^2)] \frac{n}{\varepsilon^2} J_n' \right\}^2,$$

здесь $J_n(n\varepsilon)$ и $J_n'(n\varepsilon)$ — функции Бесселя и их производные.

Сумма парциальных интенсивностей I_{n0} , I_{n2} , I_{n-2} соответствует результату Петерса — Мэтьюса [160], в то время как $I_{n\pm 1}$, $I_{n\pm 3}$ представляют собой релятивистские поправки (I_{n0} , $I_{n\pm 2}$ также содержат релятивистские поправки, которые не учитывались при получении (21)). В случае движения по окружности $I_{n0} = 0$, т. е. основные линии имеют дублетный характер. С ростом эксцентриситета тонкая структура становится триплетной, и в пре-

Рис. 6. Тонкая структура спектра гравитационного излучения при квазиэллиптическом движении



дельном случае $\varepsilon \rightarrow 1$ отношение $I_{n0}/I_{n\pm 2} \rightarrow 2/3$. Этот основной триплет сопровождается четырьмя слабыми линиями, имеющими интенсивности $I_{n\pm 1}$, $I_{n\pm 3}$ порядка $M/d\omega v^2$ по отношению к $I_{n\pm 2}$ (рис. 6).

Для вычисления полной интенсивности гравитационного излучения с учетом релятивистских поправок выполним суммирование в (17) по n , используя следующее представление производных от δ -функции:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(n+m\frac{\Omega}{\omega_r}\right)(\omega_r - \omega_r')} (\omega_{nm})^k = 2\pi \left(\frac{\omega_r}{i}\right)^k \delta^{(k)}(\omega_r - \omega_r'). \quad (22)$$

В результате получим для полной интенсивности гравитационного излучения выражение [164]:

$$I = \frac{1024}{5} \left(\frac{\mu}{M}\right)^2 \frac{|E|^5}{(1 - \varepsilon^2)^{7/2}} \left\{ 1 + \frac{73}{24} \varepsilon^2 + \frac{67}{96} \varepsilon^4 + \right.$$

$$+ \frac{|E|}{168(1-\varepsilon^2)} \left(13 - 2018\varepsilon^2 - \frac{4893}{4} \varepsilon^4 + \frac{839}{16} \varepsilon^6 \right), \quad (23)$$

где $\tilde{E} = (E - \mu)/\mu$. Первые три члена в фигурных скобках в (23) соответствуют результату Петерса — Мэтьюса, а последний член представляет собой искомую релятивистскую поправку. Для кругового движения ($\varepsilon=0$) (23) совпадает с результатом Вагонера и Уилла [162]. Относительный вклад поправочного члена в (23) быстро возрастает с ростом эксцентриситета.

Гравитационное излучение, поглощаемое черной дырой

Если центральной компонентой двойной системы является черная дыра, то часть излучения поглощается ею (в случае метрики Керра поглощение может быть отрицательным благодаря суперрадиации). Для расчета поглощения достаточно вычислить тетрадную проекцию ψ_0 тензора Вейля в окрестности горизонта событий. Представим ψ_0 в виде разложения по спиновым сферическим гармоникам (так как $a \omega \ll 1$ для интересующих нас частот)

$$\psi_0 = \sum_{lm\omega} {}_2R_{lm\omega}(r) {}_2Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (24)$$

получим для радиальной функции ${}_2R_{lm\omega}$ уравнение (7.86), которое решается с помощью функции Грина в длинноволновом приближении (7.134). В асимптотической области вблизи горизонта $r^* \rightarrow -\infty$ найдем

$$\begin{aligned} {}_2R_{lm\omega} \sim & (-1)^l \mu (2\pi)^{-3/2} [(l+2)!(l-2)!]^{1/2} \frac{(r_+ + r_-)^{l+2}}{(2l+1)!} \frac{\Gamma(l+1+2iQ)}{\Gamma(-1+2iQ)} \times \\ & \times {}_0S_{lm} \left(\frac{\pi}{2} \right) \Delta^{-2} e^{-ikr^*} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t - m\varphi(t))} (r_p(t))^{-(l+1)} dt. \end{aligned} \quad (26)$$

Для оценки ограничимся случаем кругового движения $r_p = d$, $\varphi_p = \omega_\varphi t$. Из (26) видно, что при возрастании числа l растет степень малого отношения $(r_+ - r_-)/d$, поэтому основной вклад будет давать минимальное значение $l=2$. Подставляя (26) в (24) и далее в формулу (7.144), для мощности поглощения гравитационного излучения черной дырой получим

$$I_H = \frac{16\mu^2 M^6 r_+}{d^9} \left(1 + \frac{3a^2}{M^2} \right) \frac{\omega_\varphi - \Omega_H}{\omega_\varphi}, \quad (27)$$

где $\Omega_H = a/2Mr_+$ — угловая скорость черной дыры. Как и следовало ожидать это выражение меняет знак при $\omega_\varphi = \Omega_H$, отрицатель-

ное поглощение имеет место, если частица вращается медленнее черной дыры. Однако величина поправки на поглощение весьма мала по сравнению с релятивистскими поправками к мощности излучения, уходящего на бесконечность.

Сопоставляя (27) с (23) (при $\varepsilon=0$), находим, что если $\omega_\varphi \gg \Omega_H$, то относительная величина поправки имеет порядок $(M/d)^4 \sim v^8$. В частности, для невращающейся дыры получаем простой результат

$$I_H = \frac{32}{5} \mu^2 \frac{M^7}{d^9}. \quad (28)$$

В случае $\omega_\varphi \ll \Omega_H$ последний множитель в (27) становится большим и величина поправки на поглощение возрастает, приобретая относительный порядок $v^5 a/M$ к основному эффекту, что, однако, по-прежнему мало по сравнению с первой релятивистской поправкой к излучению на бесконечность, имеющей порядок v^2 .

§ 11. ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Так было названо излучение (различной природы), сопровождающее движение частиц по круговым (неустойчивым) геодезическим вокруг черных дыр с релятивистской скоростью. Интерес к геодезическому синхротронному излучению (ГСИ) был стимулирован работой Мизнера [165], в которой была высказана мысль о возможности интерпретации результатов Вебера 1969 г. [166] (впоследствии неподтвердившихся) путем привлечения механизма ГСИ. Такой механизм в принципе мог бы помочь разрешить противоречие в энергетическом балансе Галактики, которое возникало бы, если предположить, что события, сообщенные Вебером, связаны с источником в центре Галактики, излучающим гравитационные волны изотропно и в широкой полосе частот. Величина сигналов, принимавшихся Вебером, соответствует потере массы источником $(10^3—10^6)M_\odot$ в год, что противоречит уже факту существования Галактики в течение $\sim 10^{10}$ лет (полная масса $\sim 10^{11} M_\odot$), а также оценке энергетических потерь $< 70 M_\odot$ в год, полученной из наблюдений [167, 168]. Если же предположить, что излучение резко анизотропно и сосредоточено в пределах угла $\Delta\theta \sim 10^{-3}$ около плоскости Галактики, то указанного противоречия можно избежать. В электродинамике подобная фокусировка возникает естественным образом при движении заряда с релятивистской скоростью по окружности (синхротронное излучение СИ), при этом $\Delta\theta \sim 1/\gamma$ (γ — отношение энергии частицы к массе покоя). Исходя из этой аналогии можно было бы предположить, что источником анизотропного гравитационного излучения, сосредоточенного в плоскости Галактики, являются тела, движущиеся по релятивистским круговым орбитам, близким к замкнутой светогеодезической (3.17), вокруг сверхмассивной

черной дыры. Частота основного тона для такой черной дыры ($M \sim (10^7 - 10^9) M_\odot$) слишком низка (антенна Вебера была настроена на частоту $\sim 10^3$ Гц), но, поскольку релятивистский источник излучает на высоких гармониках основного тона, повышение частоты излучения, так же как и его фокусировку, можно было бы отнести за счет релятивистских эффектов.

Вслед за этим последовало большое число работ (ссылки на работы, выполненные до 1975 г., можно найти в [91]), в которых были рассчитаны характеристики ГСИ в полях Шварцшильда [169], Керра [91, 94, 170—172], а также заряженных черных дыр [174—175] на основе приближенных аналитических методов и численно. Было найдено, что фокусировка на высоких гармониках в спектре излучения действительно возникает, однако имеется отличие от СИ в плоском пространстве-времени, обусловленное универсальностью гравитационного взаимодействия: длина формирования импульса излучения оказывается в γ раз большей, чем в случае обычного синхротронного излучения из-за того, что испускаемые кванты (фотоны, гравитоны) следуют по близким к орбите частицы геодезическим (более подробно это обсуждается в § 14). В частности, отношение максимальной частоты в спектре ГСИ к частоте основного тока пропорционально γ^2 , а не γ^3 , как в случае СИ, причем спектр гравитационного излучения является монотонно спадающим. Однако основным недостатком модели Мизнера является отсутствие реалистического механизма инжекции тел на релятивистские орбиты около черной дыры, а также неустойчивость такого движения. Более реальным процессом является падение тел в черную дыру по неперiodическим траекториям, излучение гравитационных волн при падении подробно изучено в работах [179—186], но в этом случае релятивистские эффекты слабы. Весьма эффективно излучаются гравитационные волны при релятивистских пролетах гравитирующих тел [177, 178].

Радиальные функции в приближении ВКБ

Поскольку движение является периодическим, для возмущений ${}_s\psi(x)$ и порождающих эти возмущения источников ${}_sT(x)$ следует воспользоваться разложениями в ряды Фурье вида

$${}_s\psi(x) = \sum_{l=|s|}^{\infty} \sum_{m=-l}^{\infty} {}_sR_{lm\omega}(r) {}_sZ_{lm}^{a\omega}(\theta, \varphi) e^{-im\omega_0 t}, \quad (1)$$

при этом радиальные функции будут удовлетворять уравнению (7.86) с потенциалом ${}_sU$, определенным в (7.118), и $\omega = m\omega_0$. Как будет видно из дальнейшего, основной вклад в излучение ультрарелятивистских частиц дают высокие гармоники l , $|m| \gg 1$, и в масштабе соответствующей длины волны потенциал ${}_sU$ является медленно меняющейся функцией. В этом случае решение ради-

ального уравнения можно с достаточной точностью построить методом ВКБ. Однако прямое решение уравнения (7.86) методом ВКБ затруднительно из-за того, что потенциал ${}_sU$ при $s \neq 0$ — комплекснозначная функция. Целесообразно поэтому воспользоваться преобразованными радиальными уравнениями (7.123) с вещественным потенциалом (7.124) для радиальных функций ${}_sX(r)$. Нет необходимости строить соответствующее (7.123) неоднородное уравнение, так как с помощью формул перехода (7.125) можно вернуться от ${}_sX(r)$ к функциям ${}_sR(r)$, через которые выражается функция Грина неоднородного уравнения. Чтобы построить эффективный потенциал ${}_sU$ (7.124), входящий в уравнение для новых радиальных функций, необходимо вычислить величины $\alpha_s(r)$ и $\beta_s(r)$. Для наших целей достаточно рассмотреть значения $s = -1, -2$. Функции $a_s(r)$ и $b_s(r)$ строятся на основе соотношений между ${}_sR(r)$ и ${}_{-s}R(r)$ вида (7.48), (7.49), (7.54), (7.55), и далее $\alpha_s(r)$ и $\beta_s(r)$ находятся по формулам (7.120). Выберем ${}_sR$ нормированными в соответствии с (7.66), (7.67) при $\gamma_s = 1, \delta_s = 1$. Тогда в упомянутых соотношениях численные коэффициенты изменятся, и мы будем иметь ${}_sR \equiv {}_sR^{\text{in(up)}}$

$${}_1R = -A_{-1}^2 \mathcal{D}_{0-1}^2 R; \quad {}_2R = A_{-2}^2 \mathcal{D}_{0-2}^4 R; \quad (2)$$

где A_{-1} и A_{-2} далее отождествляются с коэффициентами в (7.116). Значения A_{-1} и A_{-2} для мод in и up находятся путем применения формул (7.42, 54) к асимптотикам соответствующих мод. Сравнивая соотношения между ${}_sR$ и ${}_{-s}R$ с формулами (7.116), которые служат определением функций $a_s(r)$ и $b_s(r)$, и выражая вторые производные от ${}_sR$ с помощью соответствующих уравнений через ${}_sR$ и $d{}_sR/dr$, находим

$$\Delta a_{-1} = \frac{2\mathcal{K}^2}{\Delta} - i\mathcal{K}' - i_{-1}\lambda, \quad \Delta b_{-1} = 2i\mathcal{K}, \quad (3)$$

$$\Delta^2 a_{-2} = 3\mathcal{K}'^2 + {}_{-2}\lambda({}_{-2}\lambda + 2) + 20\omega\mathcal{K} - \frac{8\mathcal{K}}{\Delta} [({}_{-2}\lambda + 1)\mathcal{K} + \mathcal{K}'\Delta'] + \\ + \frac{2\mathcal{K}^2}{\Delta^2} (\Delta'^2 + 4\mathcal{K}^2) + 2i \left[({}_{-2}\lambda + 3)\mathcal{K}' - 3\omega\Delta' + \frac{\mathcal{K}}{\Delta} ({}_{-2}\lambda\Delta' - 6\mathcal{K}\mathcal{K}') \right],$$

$$b_{-2} = 2i [4\omega - (\Delta'\mathcal{K}' + 2({}_{-2}\lambda + 2)\mathcal{K})\Delta^{-1} + \mathcal{K}(\Delta'^2 + 4\mathcal{K}^2)\Delta^{-2}]. \quad (4)$$

Постоянные κ_s (7.119) при этом равны

$$\kappa_{-1} = [{}_{-1}\lambda^2 + 4a\omega(m - a\omega)]^{1/2}, \\ \kappa_{-2} = \{ {}_{-2}\lambda^2 ({}_{-2}\lambda + 2)^2 + 144\omega^2 [a^2(m - a\omega)^2 + M^2] + \\ + 40{}_{-2}\lambda^2 a\omega(m - a\omega) + 48{}_{-2}\lambda a\omega(m + a\omega) \}^{1/2}, \quad (5)$$

Применяя теперь соотношения (4) и (5) к асимптотикам функций ${}_sR^{\text{in}}$ и ${}_sR^{\text{up}}$ при $r \rightarrow \infty$, получим значения коэффициентов A_s :

$$A_{-1}^{\text{in}} = (2|\omega|)^{-1}, \quad A_{-1}^{\text{up}} = 2|\omega|\kappa_{-1}^{-1}, \quad (6)$$

$$A_{-2}^{\text{in}} = (2\omega)^{-2}, \quad A_{-2}^{\text{up}} = (2\omega)^2 \kappa_{-2}^{-1}; \quad l, |m| \gg 1.$$

В приближении высших мультиполей $\omega = m\omega_0$; $|m| \gg 1$ собственные значения углового оператора определяются формулой (Д.29) Дополнения, или с учетом того, что $\omega = m\omega_0$

$${}_s\lambda = m^2(1 - a\omega_0)^2 + (2q+1)|m|(1 - a^2\omega_0^2)^{1/2}, \quad (7)$$

где $q = l - |m|$. В таком приближении ${}_s\lambda$ вовсе не зависит от s , и далее мы индекс s опускаем.

Вычисляя величины $\alpha_s(r)$ и $\beta_s(r)$ при $s = -1, -2$ согласно (7.120) и подставляя их в формулу (7.124) для потенциала ${}_sU$, можно убедиться в том, что основные члены в рассматриваемом приближении ($\sim m^2$ и $|m|$) не зависят от s и полностью содержатся в первом слагаемом с $s=0$,

$${}_sU \simeq V = -\frac{\mathcal{K}^2 - \lambda\Delta}{(r^2 + a^2)^2}. \quad (8)$$

В асимптотических областях $r^* \rightarrow \pm\infty$ потенциал становится постоянным

$$V(r^*) \propto \begin{cases} -\omega^2, & r^* \rightarrow \infty, \\ -k^2, & r^* \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (9)$$

поэтому решения радиального уравнения для ${}_sX \equiv X$

$$\frac{d^2x}{dr^{*2}} - VX = 0; \quad X \equiv X^{\text{in (up)}} \quad (10)$$

одинаковы при $s=0, -1, -2$ и асимптотически совпадают с решениями скалярного уравнения (4.66), которые мы выберем нормированными условиями

$$X^{\text{in}}(r^*) \propto \begin{cases} (2|\omega|)^{-1/2} (e^{-i\omega r} + \hat{\sigma} e^{i\omega r}), & r^* \rightarrow \infty, \\ 2|k|^{-1/2} \hat{\tau} e^{-ikr^*}, & r^* \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (11)$$

$$X^{\text{up}}(r^*) \propto \begin{cases} (2|\omega|)^{-1/2} e^{i\omega r}, & r^* \rightarrow \infty, \\ 2|k|^{-1/2} \varepsilon(k\omega) \left(\frac{1}{\hat{\tau}} e^{ikr^*} - \frac{\hat{\sigma}^*}{\hat{\tau}^*} e^{-ikr^*} \right), & r^* \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (12)$$

Построим теперь решение уравнения (16) в приближении ВКБ. Прежде всего необходимо найти точки поворота для уравнения (16), т. е. решения уравнения $V(r) = 0$. В качестве опорной

точки выберем радиус r_p круговой геодезической ультрарелятивистской частицы (3.17), близкий к радиусу круговой фотонной орбиты (3.16). В этой точке

$$\mathcal{K}^2(r_p) = \Delta_p m^2 (1 - a\omega_0)^2 \left(1 - \frac{(r_p - M)^2}{4\gamma^2 \Delta_p} \right), \quad (13)$$

где $\Delta_p \equiv \Delta(r_p)$, и лидирующие члены ($\sim m^2$) в (14) взаимно уничтожаются. В результате находим

$$V(r_p) = \frac{(r_p - M)^2 (1 - a\omega_0^2)}{(r_p^2 + a^2)^2} \frac{m^2}{4\gamma^2}, \quad (14)$$

при этом отброшенные члены в ${}_sU$ имеют более низкий порядок малости. В окрестности точки r_p мнимая часть исходного потенциала ${}_sU$ также мала, поскольку при $r = r_1$ (3.16) мнимые слагаемые

$$\begin{aligned} 2\mathcal{K}' - \frac{\mathcal{K}\Delta'}{\Delta} &= \frac{\Delta}{\mathcal{K}} \left(\frac{\mathcal{K}^2}{\Delta} \right)' = \\ &= -\frac{2\omega}{\Delta} (VMr_\gamma \mp a) \sqrt{\frac{r_\gamma}{M}} (r_\gamma^2 - 3Mr_\gamma \mp 2a\sqrt{Mr_\gamma}) \end{aligned} \quad (15)$$

обращаются в нуль в силу уравнения для r_1 (3.15) и

$$r_p - r_1 = 1/6 (r_1 - M) \gamma^{-2}. \quad (16)$$

Решая уравнение $\partial V / \partial r = 0$, с помощью разложения по степеням $1/\gamma$, находим положение максимума потенциала

$$r_0 = r_p \left[1 - \frac{(r_p - M)^2 (r_p^2 - a^2)}{Mr_p (r_p^2 + a^2)} \cdot \frac{1}{12\gamma^2} \right]. \quad (17)$$

Таким образом, радиусы орбит ультрарелятивистских частиц лежат правее положения максимума эффективного радиального потенциала на малую относительную величину $\sim 1/\gamma^2$ (рис. 7).

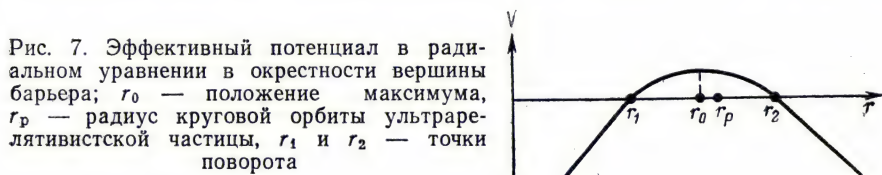


Рис. 7. Эффективный потенциал в радиальном уравнении в окрестности вершины барьера; r_0 — положение максимума, r_p — радиус круговой орбиты ультрарелятивистской частицы, r_1 и r_2 — точки поворота

Путем разложения величин по $1/\gamma$ отыскивается и положение корней потенциала (8), т. е. точек поворота для радиальных функций

$$r_{1,2} = r_p \left[1 \mp \frac{(r_p - M)}{2\gamma \sqrt{3Mr_p}} \left(1 + \pi \frac{m_{cr}(1+2q)}{4m} \right)^{1/2} \right], \quad (18)$$

где

$$m_{cr} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{(r_p + 3M)}{\sqrt{r_p M}} \gamma^2. \quad (19)$$

Заметим, что точки поворота в масштабе r_p также близки, так как $(r_2 - r_1) \sim r_p/\gamma$, и при $\gamma \rightarrow \infty$ сливаются. Следовательно, для применения метода ВКБ следует использовать технику сшивания квазиклассических функций в окрестности максимума потенциального барьера.

С помощью разложения ВКБ в областях $|r - r_p| \gg r_p \gamma$ получим решения

$$X^{in} = (-4V(r))^{-1/4} \begin{cases} \exp(-i\varepsilon(\omega) \int_{y_2}^y (-V)^{1/2} dy) + \tilde{\sigma} \exp(i\varepsilon(\omega) \int_{y_2}^y (-V)^{1/2} dy), \\ \tilde{\tau} \exp(i\varepsilon(k) \int_y^{y_1} (-V)^{1/2} dy), \end{cases} \quad r > r_2, \quad (20)$$

$$X^{up} = (-4V(r))^{-1/4} \begin{cases} \exp(i\varepsilon(\omega) \int_{y_2}^y (-V)^{1/2} dy), \quad r > r_2, \\ \varepsilon(k\omega) \left[\frac{1}{\tau} \exp\left(-i\varepsilon(k) \int_y^{y_1} (-V)^{1/2} dy\right) - \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\sigma}^*}{\tilde{\tau}^*} \exp\left(i\varepsilon(k) \int_y^{y_1} (-V)^{1/2} dy\right) \right], \quad r < r_1, \end{cases} \quad (21)$$

где $y = r^* - r^*$ и множители $\varepsilon(\omega) = \omega/|\omega|$ и $\varepsilon(k) = k/|k|$ введены для согласования с асимптотиками (11), (12). Учитывая соотношения (9), легко показать, что при $r^* \rightarrow \pm\infty$ формулы (20), (21) действительно переходят в (11), (12), причем $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\tau}$ совпадают с $\hat{\sigma}$ и $\hat{\tau}$ по модулю.

Для отыскания коэффициентов прохождения и отражения следует произвести сшивание решений в точках поворота. Это осуществляется с помощью точного решения уравнения (10) вблизи вершины барьера. В этой области можно аппроксимировать $V(r)$ параболой (совпадающей с V в точках $r_0, r_{1,2}$)

$$\tilde{V} = pb - b^2 y^2, \quad (22)$$

где

$$b^2 = - \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dy^2} \bigg|_{r=r_0} = \frac{3\omega^2 r_p \Delta_p^2}{(r_p^2 + a^2)^4}, \quad (23)$$

$$p = \frac{V(r_0)}{b} = 1 + 2q + \frac{4}{\pi} \frac{|m|}{m_{cr}}. \quad (24)$$

Решением уравнения

$$\frac{d^2 X}{dy^2} - \tilde{V}(y) X = 0 \quad (25)$$

являются функции параболического цилиндра $D_\nu(\pm z)$ индекса

$$\nu = -1/2[(1 + i p \varepsilon(\omega)) \theta(y) + (1 + i p \varepsilon(k)) \theta(-y)] \quad (26)$$

от аргумента

$$z = \sqrt{b} y [(i \varepsilon(\omega) - 1) \theta(y) + (i \varepsilon(k) - 1) \theta(-y)]. \quad (27)$$

Используя асимптотические формулы

$$D_\nu(z) = \begin{cases} z^\nu \exp(-z^2/4), & y \rightarrow -\infty, \\ z^\nu \exp(-z^2/4) - \sqrt{2\pi} \frac{e^{i\pi\nu}}{z^{\nu+1} \Gamma(-\nu)} \exp(z^2/4), & y \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (28)$$

и приближенные значения интегралов в окрестности точек поворота

$$\int_{y_1}^y (-V)^{1/2} dy \simeq \int_{y_1}^y (-\tilde{V})^{1/2} dy \simeq \varepsilon(y) \left(\frac{by^2}{2} - \frac{p}{2} \ln |y| \right) + \text{const}, \quad (29)$$

можно показать, что решения (20) и (21) согласованы со следующими решениями в окрестности точек поворота:

$$X^{\text{in}}(r) \sim \frac{e^{-\pi p/8}}{(2\pi\sqrt{2b})^{1/2}} \Gamma\left(\frac{1+ip}{2}\right) D_\nu(z) e^{i\varphi_{\text{in}}}, \quad (30)$$

$$X^{\text{up}}(r) \sim \frac{e^{-\pi p/8}}{(2b)^{1/4}} D_\nu(-z) e^{i\varphi_{\text{up}}}, \quad (31)$$

где φ_{in} и φ_{up} — некоторые фазы. Модуль коэффициента прохождения $\hat{\tau}$ (фаза в дальнейшем не существенна) определяется формулой

$$|\hat{\tau}| = \frac{e^{-\pi p/4}}{\sqrt{2\pi}} \left| \Gamma\left(\frac{1+ip}{2}\right) \right|. \quad (32)$$

Таким образом, совокупность формул (30), (31) и (20), (21) определяет радиальные моды in и up в непосредственной близости от частицы и в волновых зонах соответственно. Заметим, что модуль аргумента функций параболического цилиндра при $r = r_p$ имеет порядок

$$|z(r_p)| \sim \sqrt{|m|/\gamma^2} \ll 1 \quad (33)$$

и можно положить

$$D_v(z(r_p)) \approx D_v(0) = \frac{2^{v/2} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{v}{2}\right)}{2^{\left(\frac{v}{2}+1\right)} \Gamma(-v)} \quad (34)$$

(при переходе ко второй форме записи использована формула удвоения аргумента для гамма-функции).

Излучение скалярных волн

Для случая $s=0$ построенные выше радиальные функции непосредственно связаны с физическим скалярным полем. Поэтому дальнейшая задача сводится к нахождению решения неоднородного уравнения (7.7) с источником

$${}_0T = \frac{4\pi q_c}{u^0} \delta(r - r_p) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \delta(\varphi - \omega_0 t), \quad (35)$$

который с точностью до коэффициента представляет собой след тензора энергии-импульса частицы, движущейся по орбите радиуса r_p в экваториальной плоскости метрики Керра с угловой скоростью ω_0 (3.18), q_c — скалярный заряд. Временная компонента 4-скорости u^0 находится из соотношения

$$u^0 (g_{00} + \omega_0 g_{03}) = \gamma \quad (36)$$

и равна

$$u^0 = \gamma \frac{r_p + 3M}{r_p - M}. \quad (37)$$

Источник в радиальном уравнении

$${}_0T_{lm\omega}(r) = \frac{\sqrt{8\pi} (r_p - M)}{\gamma(r_p + 3M)} {}_0S_{lm}^{\gamma\omega}\left(\frac{\pi}{2}\right) \delta(r - r_p) \quad (38)$$

содержит сфероидальные функции при $\theta = \pi/2$, которые при больших $|m|$ дают множитель $|m|^{1/4}$, поэтому основной вклад в излучение будет давать область значений $|m| \gg 1$. Запаздывающие решения неоднородного радиального уравнения получаются с помощью функции Грина (7.111) при $s=0$

$${}_0R_{lm\omega}(r) = \frac{i\varepsilon(\omega)}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \frac{\sqrt{8\pi} (r_p - M)}{\gamma(r_p + 3M)} {}_0S_{lm}^{\gamma\omega}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \\ \times (X^{\text{in}}(r) X^{\text{up}}(r_p) \theta(r_p - r) + X^{\text{up}}(r) X^{\text{in}}(r_p) \theta(r - r_p)). \quad (39)$$

Подставляя (39) в (1) и переходя к асимптотическим областям $r^* \rightarrow \pm\infty$, будем иметь

$$\psi \simeq \sum_{\substack{l=1 \\ |m| \leq l}} q_c G_{lm} {}_0Z_{lm}^{\gamma\omega}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \begin{cases} (2|\omega|)^{-1/2} \frac{1}{r} e^{i\omega r + i\varphi_\infty}, & r^* \rightarrow \infty, \\ (4Mr_+ |k|)^{-1/2} e^{-ikr^* + i\varphi_+}, & r^* \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (40)$$

где $\omega = m\omega_0$; φ_∞ и φ_+ — некоторые фазы, а коэффициенты G_{lm} равны

$$G_{lm} = i\varepsilon(\omega) \Gamma\left(-\frac{1+ip}{4}\right) e^{-\pi p/8} \frac{(r_p - M)}{b^{1/4} \gamma(r_p + 3M)} {}_0S_{lm}^{2\omega}\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (41)$$

(для функций D_ν в точке $r=r_p$ использованы значения (34)). При больших l , $|m|$ сфероидальные гармоники имеют максимум в окрестности $\theta \sim \pi/2$ с шириной

$$\Delta\theta \sim |m|^{-1/2} \quad (42)$$

(см. Дополнение). Экспоненциальный множитель $e^{-\pi p/8}$ в (41) выделяет в сумме (40) по l и m узкую область значений в окрестности $l=|m|$ ($q=0$), с хорошей точностью в этой сумме можно оставить всего один член $q=0$. По той же причине эффективная область изменения m простирается вплоть до $m \sim m_{cr}$ (27), и, поскольку $m_{cr} \sim \gamma^2$, находим, что высокочастотная часть излучения сосредоточена в узкой области углов

$$\Delta\theta \sim \gamma^{-1} \quad (43)$$

около плоскости (движения) $\theta = \pi/2$.

Подстановка асимптотики (40) при $r \rightarrow \infty$ в (4.27) приводит к следующему выражению для интенсивности излучения, уходящего на бесконечность:

$$I_{\text{скал}}^\infty = \frac{d\mathcal{E}_0^\infty}{dt} = \frac{2q_c^2 \sqrt{3r_p M} (r_p - M)}{\pi^{5/2} r_p^2 (r_p + 3M)^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{m}{m_{cr}} \frac{e^{-\pi p/4} \left| \Gamma\left(-\frac{1+ip}{4}\right) \right|^2}{2^q q!} H_q^2(0), \quad (44)$$

где $H_q(0)$ — значения полиномов Эрмита в нуле (Д.32). Соответствующая величина скорости потери углового момента связана с (44) соотношением

$$\frac{d\mathcal{E}_3^\infty}{dt} = \frac{1}{\omega_0} I^\infty, \quad (45)$$

поскольку для отдельных мультиполей $d\mathcal{E}_3 = \frac{m}{\omega} d\mathcal{E}_0$, $\omega = m\omega_0$.

Если аппроксимировать гамма-функцию в (44) первым членом разложения по формуле Стирлинга, то получим результат, найденный в [94] (однако использование формулы Стирлинга снижает точность, так как аргумент гамма-функции не является большим: в существенной области изменения m и q $p \gg 1$).

Как видно из формулы (44), при $p \gg 4/\pi$ спектр спадает экспоненциально, значение $p = 4/\pi$ соответствует $|m| = m_{cr}$, $q=0$ (члены $q \geq 1$ дают вклад 0,1% от основного члена $q=0$). Таким обра-

зом, мультипольное разложение скалярного ГСИ включает гармоники $l = |m|$, $m \leq m_{cr} \propto \gamma^2$, граничная частота в спектре равна

$$\omega_{cr} = m_{cr} |\omega_0| = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{(r_p + 3M)\gamma^2}{r_p^{1/2}(r_p^{3/2} \pm M^{1/2}a)}. \quad (46)$$

Характерной особенностью является обращение интенсивности излучения в нуль при $r_p \rightarrow M$ (что возможно в случае экстремальной метрики Керра $a \rightarrow M$).

Учитывая квазинепрерывность спектра при больших m , перейдем от суммирования по m к интегрированию по параметру p

$$I_{\text{скал}}^{\infty} = \frac{3}{4\pi^{3/2}} \cdot q_c^2 \gamma^2 \frac{(r_p - M)}{r_p^2(r_p + 3M)} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{H_q^2(0)}{2^q q!} \times \\ \times \int_{1+2q}^{\infty} dp (p - 2q - 1) e^{-\pi p/4} \left| \Gamma\left(\frac{1+ip}{4}\right) \right|^2, \quad (47)$$

или с учетом лишь основного члена $q=0$ ($H_0(0)=1$)

$$I_{\text{скал}}^{\infty} = \frac{3}{4\pi^{3/2}} q_c^2 \gamma^2 \frac{(r_p - M)}{r_p^2(r_p + M)} \int_1^{\infty} (p - 1) e^{-\pi p/4} \left| \Gamma\left(\frac{1+ip}{4}\right) \right|^2 dp. \quad (48)$$

Из этих формул видно, что интенсивность ГСИ содержит множитель $\gamma^2 \gg 1$, при этом зависимость r_p от γ слабая (при $\gamma \rightarrow \infty$ $r_p \rightarrow r_\gamma$, (3.16)). Заметим, что интенсивность СИ, возникающего при движении релятивистских частиц в плоском пространстве-времени по окружности, пропорциональна γ^4 . Причина этого различия в том, что граничная частота СИ в γ раз больше величины (46), а интенсивность пропорциональна ω_{cr}^2 (это, в свою очередь объясняется различием длин формирования высокочастотного импульса в режимах СИ и ГСИ, подробнее см. § 14).

Вычисление интенсивности скалярного излучения, поглощаемого черной дырой, выполняется с помощью формулы (4.22) (для потери углового момента сохраняет силу соотношение (45)). При этом различие в численных множителях в (40) для $r^* \rightarrow \pm \infty$ компенсируется при дифференцировании по r и мы получаем простой результат

$$I_{\text{скал}}^H = \frac{(\omega_0 - \omega_H)\omega_0}{|(\omega_0 - \omega_H)\omega_0|} I_{\text{скал}}^{\infty}, \quad (49)$$

где знаковая функция указывает на принципиальную возможность суперрадиации. Однако с помощью явного выражения для угловой скорости частицы (3.18) нетрудно показать, что знаковая функция в (49) положительна как для прямого, так и обратного вращений независимо от γ . Это означает, что в режиме ГСИ всег-

да имеет место поглощение излучения черной дырой, причем поглощается ровно половина энергии, теряемой частицей, поскольку

$$I^{(H)} = I^{\infty}. \quad (50)$$

Физически это объясняется тем, что радиус круговой орбиты ультрарелятивистской частицы отличается от радиуса круговой фотонной орбиты (за которой фотоны захватываются дырой) на величину порядка γ^2 , в то время как основная высокочастотная часть излучения испускается в конус с углом раствора $\sim 1/\gamma$ вокруг касательной к траектории. Ясно, что с точностью до малых поправок $\sim 1/\gamma$ половина скалярных фотонов будет захватываться черной дырой, вторая половина — уходить на бесконечность.

Электромагнитное излучение

Радиальные функции ${}_{\pm 1}R^{\text{in(up)}}$ получаются из ${}_{-1}X \equiv X^{\text{in(up)}}$ по формулам (7.125), причем в существенной области значений $l \sim |m| \sim \gamma^2$ второй член в соотношении (7.125) можно опустить. С точностью до несущественных фазовых множителей будем иметь

$$|{}_{-1}R^{\text{in}}(r)| = \frac{2\omega\mathcal{K}}{\lambda(r^2 + a^2)^{1/2}} |X^{\text{in}}(r)|, \quad (51)$$

$$|{}_{-1}R^{\text{up}}(r)| = \frac{\mathcal{K}}{2\omega(r^2 + a^2)^{1/2}} |X^{\text{up}}(r)|, \quad (52)$$

$$|{}_1R^{\text{up}}(r)| = \frac{4\omega^2}{\mathcal{K}^2} |{}_{-1}R^{\text{up}}(r)| = \frac{2\omega}{\mathcal{K}(r^2 + a^2)^{1/2}} |X^{\text{up}}(r)|. \quad (53)$$

Используя запаздывающую функцию Грина уравнения (7.86)

$$\begin{aligned} G_s^{\text{ret}}(r, r') = i\varepsilon(\omega) \Delta^s(r') ({}_sR^{\text{up}}(r) {}_sR^{\text{in}}(r') \theta(r' - r) + \\ + {}_sR^{\text{in}}(r) {}_sR^{\text{up}}(r') \theta(r - r')), \end{aligned} \quad (54)$$

строим решение неоднородных радиальных уравнений с источниками, которые получаются действием проекционных операторов $\pm 1\tau_{\mu}$ (§ 6) на 4-вектор электромагнитного тока

$$J^{\mu} = \frac{e}{r_p^2} u^0 (1, 0, 0, \omega) \delta(r - r_p) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \delta(\varphi - \omega_0 t). \quad (55)$$

Для вычисления потоков энергии и углового момента через бесконечно удаленную поверхность и поверхность горизонта событий необходимо найти ${}_{-1}R$ при $r \rightarrow \infty$ (см. (7.149)) и ${}_1R$ при $r \rightarrow r_+$ (см. (7.147)).

Учитывая нормировочные условия для ${}_sR^{\text{in(up)}}$ (7.66), (7.67) и явный вид операторов $\pm 1\tau^{\mu}$ (6.86), (6.87), найдем следующие выражения для асимптотик решения радиального уравнения:

$${}_sR(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{i\omega e^{i\omega r} f_s^{\text{in}}}{\sqrt{2} |\omega|^{3/2} r^{2s+1}}, \quad (56)$$

$${}_sR(r) \underset{r \rightarrow r_+}{\sim} \frac{ie(\omega)}{(2|k|)^{1/2}} \tau_s \Delta^{-s} e^{-ikr^*} f_s^{\text{up}}, \quad (57)$$

$$\text{где } f_s = (2\Delta)^{(1+s)/2} \sqrt{\pi} \frac{e}{r} \left\{ \frac{\mathcal{K}}{m} \left[\frac{\mathcal{K}}{\Delta} + i \left(\frac{1}{r} + s\partial_r + (1+s) \frac{(Mr-a^2)}{r\Delta} \right) \right] - \right. \\ \left. - (1-a\omega_0) \left[m(1-a\omega_0) + s \left(\partial_\theta - \frac{ia}{r} \right) \right] \right\} {}_sS_{lm}^{a\omega}(\theta) {}_sR(r) \Big|_{r=r_p}^{\theta=\frac{\pi}{2}}. \quad (58)$$

С помощью соотношений (7.148) можно провести в асимптотической области $r \rightarrow \infty$ разбиение по состояниям линейной поляризации θ , φ , для этого достаточно выделить вещественную и мнимую часть Φ_2 . Описание поляризации вблизи горизонта событий связано с выбором наблюдателя, мы примем в качестве амплитуд независимых состояний поляризации вещественную и мнимую части Φ_0 по определению (в существенной области углов $\theta \sim \frac{\pi}{2}$ это соответствует обычным θ и φ компонентам относительно локально невращающейся системы отсчета). Итак, полагая

$$\Phi_{0,2}^{\theta,\varphi} \equiv \frac{1}{2} (\Phi_{0,2} \pm \Phi_{0,2}) \quad (59)$$

в интересующих нас асимптотических областях, найдем

$$\Phi_{2,\varphi}^{\theta} \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \sum_{\substack{l=1 \\ |m| \leq l}} \frac{ie\omega(1-a\omega_0)}{2rr_p |\omega|^{3/2}} \left\{ \begin{array}{l} -{}_1R^{\text{in}}(r_p) - {}_1S' \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ \sqrt{\Delta_{p-1}} R^{\text{in}'}(r_p) - {}_1S \left(\frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right\} - {}_1Z(\theta, \varphi) e^{i\omega(r-t)}, \quad (60)$$

$$\Phi_{0,\varphi}^{\theta} \underset{r \rightarrow r_+}{\simeq} \sum_{\substack{l=1 \\ |m| \leq l}} \frac{ie \sqrt{2} \Delta_p \tau_1 (1-a\omega_0) \varepsilon(\omega)}{r_p \Delta (2|k|)^{1/2}} \left\{ \begin{array}{l} {}_1R^{\text{up}}(r_p) {}_1S' \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ \sqrt{\Delta_p} {}_1R^{\text{up}'}(r_p) {}_1S \left(\frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right\} {}_1Z(\theta, \varphi) e^{-i(kr^* + \omega t)}, \quad (61)$$

где $\omega = m\omega_0$, штрих означает производную по аргументу, все величины с индексом p берутся в точке $r = r_p$ и индексы l, m опущены. Значение коэффициента прохождения τ_1 определяется при построении ${}_1R$ через ${}_1\tilde{X}$, с точностью до фазы имеем

$$|\tau_1| = \sqrt{2Mr_+} \frac{k}{\omega} |\hat{\tau}|, \quad (62)$$

где $\hat{\tau}$ — коэффициент прохождения для $1X$ (в высокочастотном приближении равный (32)).

Подставляя выражения (61) — (65) в формулы (7.147), (7.149), находим интенсивности излучения θ - и ϕ -компонент линейной поляризации на бесконечности и горизонте событий

$$I_{\infty}^{\theta, \phi} = I_H^{\theta, \phi} = \frac{2e^2 \sqrt{3r_p M} (r_p - M)}{\pi^{3/2} r_p^2 (r_p + 3M)^2} \times \\ \times \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{e^{-\frac{\pi p}{4}}}{2^q q!} \left\{ \begin{array}{l} \left| \Gamma \left(\frac{1+ip}{4} \right) \right|^2 q^2 H_{q-1}^2(0) \\ \left| \Gamma \left(\frac{3+ip}{4} \right) \right|^2 H_q^2(0) \end{array} \right\}. \quad (63)$$

Как и в случае скалярных волн частица теряет вдвое большую энергию, чем воспринимает удаленный наблюдатель, так как по-прежнему выполняется равенство (50). Отметим также, что в интенсивность θ -компоненты дают вклад нечетные $q = l - |m|$ (в основном $q=1$), а в интенсивность ϕ -компоненты поляризации — четные q (в основном $q=0$).

Характерные особенности спектра и углового распределения — те же, что и для скалярного случая.

Переходя от суммирования по m к интегрированию по p , оставляя в (63) основные члены $q=0, 1$,

$$I_{\infty}^{\theta, \phi} = I_H^{\theta, \phi} = \frac{3e^2 (r_p - M) \gamma^2}{2\pi^{3/2} r_p^2 (r_p + 3M)} \left\{ \begin{array}{l} \int_3^{\infty} e^{-\frac{\pi p}{4}} \left| \Gamma \left(\frac{1+ip}{4} \right) \right|^2 dp \\ 2 \int_1^{\infty} e^{-\frac{\pi p}{4}} \left| \Gamma \left(\frac{3+ip}{4} \right) \right|^2 dp \end{array} \right\}. \quad (64)$$

Интенсивность электромагнитного ГСИ, как видно из этих формул, также пропорциональна γ^2 . Степень поляризации излучения в рассматриваемом приближении не зависит от γ и равна (после численного интегрирования)

$$\Pi = \frac{I^{\theta} - I^{\phi}}{I^{\theta} + I^{\phi}} \simeq 0,76. \quad (65)$$

Для потерь углового момента, как и в скалярном случае, выполняется соотношение (45).

Гравитационное излучение

Функции источников ${}_{\pm 2}T$ в формуле (3) получают в результате применения проекционных операторов ${}_{\pm 2}\tau_{\mu\nu}$ (6.15), (6.18) к тензору энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = \mu \frac{u^\mu u^\nu}{r_p^2 u^0} \delta(r - r_p) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \delta(\varphi - \omega_0 t). \quad (66)$$

В приближении высоких частот для фурье-преобразований этих функций будем иметь

$$\begin{aligned} \pm 2 T_{lm\omega}(r) = & \left(\frac{-4\Delta_p^2/\Delta}{\Delta^2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu\gamma(r_p + 3M)}{r_p(r_p - M)} \left[-\frac{2i\mathcal{K}_p(1 - a\omega_0)}{m} \partial_r \partial_\theta + \right. \\ & \left. + (1 - a\omega_0)^2 \partial_\theta^2 - \frac{\mathcal{K}_p^2}{m^2} \partial_r^2 \right] \delta(r - r_p) \left[\pm 2 S_{lm}^{a\omega}(\theta) \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}. \quad (67) \end{aligned}$$

Решение радиального уравнения (3) строится стандартным способом с помощью функций Грина. Далее для вычисления потока гравитационного излучения при $r \rightarrow \infty$ нужно найти асимптотическое выражение для скаляра ψ_4 , вещественная и мнимая части которого при $r \rightarrow \infty$ определяют амплитуды двух независимых состояний (линейной) поляризации $+$ и \times (7.154). Как и в случае электромагнитных волн на горизонте событий, мы воспользуемся аналогичным разбиением для ψ_0 . В интересующих нас асимптотических областях получаем следующие выражения для тетрадных проекций тензора Вейля, отвечающих двум состояниям поляризации:

$$\psi_4^{+, \times} \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \sum_{\substack{l=2 \\ |m| \leq l}} Q_{in}^{+, \times} {}_2Z(\theta, \varphi) \frac{e^{i\omega(r-t)}}{r}, \quad (68)$$

$$\psi_0^{+, \times} \underset{r \rightarrow r_+}{\simeq} \sum_{\substack{l=2 \\ |m| \leq l}} Q_{up}^{+, \times} \frac{\tau^2}{\Delta^2} \left| \frac{\omega}{k} \right|^{1/2} {}_2Z(\theta, \varphi) e^{-i(kr^* + \omega t)}, \quad (69)$$

$$\begin{aligned} & {}_sQ^{+, \times} = \\ & = \frac{i\sqrt{\pi} \mu \gamma (1 - a\omega_0)^2 \omega (r_p + 3M)}{r_p(r_p - M) |\omega|^{3/2}} \left\{ |m| \frac{\sqrt{3Mr_p}}{r_p + 3M} (p + 2q + 1) {}_sR(r_p) {}_sS\left(\frac{\pi}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. \left[\sqrt{\Delta_p} {}_sR'(r_p) {}_sS'\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \right\}, \quad (70) \end{aligned}$$

причем индексы in и up в (68), (69) обозначают соответствующие типы радиальных функций.

В силу симметрии (антисимметрии) спиновых сфероиальных гармоник относительно отражений (см. (Д.21)) величины (68) и (69), описывающие поляризацию \times при $\theta = \pi/2$, обращаются в нуль (так как четности ${}_sS'_{lm}$ и $\frac{d}{d\theta} {}_sS'_{lm}$ различны и при $\theta = \pi/2$ обра-

щается в нуль либо первая, либо вторая из этих величин). Таким образом, гравитационное ГСИ в плоскости $\theta = \pi/2$ линейно поляризовано, при этом $+$ -компонента имеет максимум (рис. 8, а).

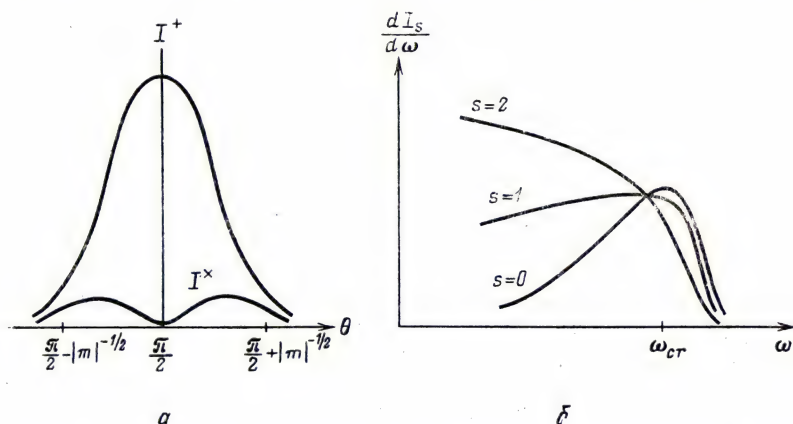


Рис. 8. Угловое распределение ГСИ различных поляризаций вблизи плоскости движения частицы (а); спектральное распределение ГСИ скалярного ($s=0$), электромагнитного ($s=1$) и гравитационного ($s=2$) (б)

Входящие в формулы (68)–(69) радиальные функции находятся с помощью соотношения (7.125), в которое в качестве X следует подставить полученное выше решение в ВКБ приближении, это дает

$$|_{-2}R^{\text{in}}(r)| = \frac{4\omega^2\Delta}{\lambda(r^2 + a^2)^{1/2}} |X^{\text{in}}(r)|, \quad (71)$$

$$|_{-2}R^{\text{up}}(r)| = \frac{\mathcal{K}^2}{4\omega^2(r^2 + a^2)^{1/2}} |X^{\text{up}}(r)|, \quad (72)$$

$$|_2R^{\text{up}}(r)| = \frac{16\omega^4}{\mathcal{K}^4} |_{-2}R^{\text{up}}(r)| = \frac{4\omega^2}{\mathcal{K}^2(r^2 + a^2)^{1/2}} |X^{\text{up}}(r)|, \quad (73)$$

причем коэффициент прохождения τ_2 связан с $\hat{\tau}$ соотношением

$$|\tau_2| = (2Mr_+)^{3/2} \frac{|k_2 k|}{\omega^2} |\hat{\tau}|. \quad (74)$$

Подставляя эти величины в (68)–(69) и далее в формулы (7.144), (7.155), воспользовавшись асимптотическими представлениями (Д.28) для спиновых сфероидальных функций, получим $I = I^{\times} + I^+$, причем так же, как и в случаях скалярных и электромагнитных волн, мощности гравитационного излучения, погло-

щаемого черной дырой и уходящего на бесконечность, в высокочастотном приближении совпадают для каждой из компонент поляризации

$$I_{\infty}^{+, \times} = I_H^{+, \times} = \frac{\mu^2 \sqrt{3r_p M} (r_p - M)}{\sqrt{\pi} r_p^2 (r_p + 3M)^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{m_{cr}}{m} \frac{e^{-\pi p/4}}{2^q q!} \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{(p+2q+1)^2}{8} \left| \Gamma \left(\frac{1+ip}{4} \right) \right|^2 H_q^2(0), \\ 8 \left| \Gamma \left(\frac{3+ip}{4} \right) \right|^2 q^2 H_{q-1}^2(0). \end{cases} \quad (75)$$

Переходя от суммирования по m к интегрированию по p и учитывая основные члены $q=0$ ($l=|m|$) для $+$ -компоненты поляризации и $q=1$ ($l=|m|+1$) для компоненты « \times », заметим, что в отличие от скалярного и электромагнитного случаев подинтегральное выражение будет иметь простые полюсы при $p=1$ и $p=3$ соответственно, лежащие вблизи нижнего предела области интегрирования (вне нее). Благодаря этому интегралы удастся вычислить в логарифмическом приближении, что дает

$$I^{+, \times} = \frac{6\mu^2(r_p - M)e^{-\pi/4}}{\pi^{3/2} r_p^2 (r_p + 3M)} \left\{ \begin{aligned} & \left| \Gamma \left(\frac{1+i}{4} \right) \right|^2 \gamma^2 \ln \gamma \\ & 8e^{-\frac{\pi}{2}} \left| \Gamma \left[\frac{3}{4} (1+i) \right] \right|^2 \gamma^2 \ln \gamma \end{aligned} \right\}. \quad (76)$$

Таким образом, полная интенсивность гравитационного излучения содержит дополнительный множитель $\ln \gamma$ по сравнению со скалярным и электромагнитным случаями. Аналогичная особенность имеет место и для тормозного излучения при пролетах релятивистских частиц около черных дыр [221]. Степень поляризации излучения равна

$$\Pi = \frac{I^{\times} - I^{+}}{I} \simeq 0,92.$$

Заметим, что эта цифра противоречит результату, полученному из анализа данных Вебера (40%).

Сравнение спектров ГСИ полей с различным спином

Полученные выражения для интенсивностей скалярного (48), электромагнитного (63) и гравитационного (75), (76) ГСИ имеют сходную структуру. При больших p гамма-функции можно аппроксимировать по формуле Стирлинга. Ограничиваясь основным членом разложения, можем положить

$$\left| \Gamma \left(\frac{1+ip}{4} \right) \right| \sim \frac{4\pi}{\sqrt{p}} e^{-\pi p/4} \quad (77)$$

и аналогично для других гамма-функций. В комбинации с экспоненциальным фактором $e^{-\pi p/4}$, уже имеющимся в перечисленных формулах, это дает общий экспоненциальный множитель $\exp(-\pi p/2)$, который дает зависимость от частоты вида $\exp(-2\omega/\omega_{cr})$ при $\omega \geq \omega_{cr}$, где ω_{cr} определяется формулой (46). Этот фактор является общим для полей всех спинов $s=0, 1, 2$. Предэкспоненциальный фактор, однако, различен: m/m_{cr} — для скалярных, 1 — для электромагнитных и m_{cr}/m — для гравитационных волн. В результате получаем следующую универсальную зависимость для спектров:

$$\frac{dI_s}{d\omega} \propto B_s \left(\frac{\omega}{\omega_{cr}} \right)^{1-s} e^{-2\omega/\omega_{cr}}, \quad (78)$$

где под $dI/d\omega$ понимается величина, возникающая при переходе от суммирования по m к интегрированию по ω

$$I = \sum_{m=1}^{\infty} I(m) = \int_0^{\infty} \frac{dI}{d\omega} d\omega, \quad (79)$$

и B_s — некоторый размерный фактор, зависящий от γ и отношения a/M . Как видно из (78), мощность скалярного излучения в области $\omega \leq \omega_{cr}$ является растущей функцией частоты, электромагнитного — постоянной величиной, а гравитационного — монотонно падающей. Качественное поведение всех трех спектров показано на рис. 8, б (кривые приведены в различных масштабах). Более точный расчет при малых ω показывает, что мощность электромагнитного излучения при $\omega \rightarrow 0$ стремится к нулю.

Появление множителя $(\omega/\omega_{cr})^{1-s}$ связано с различной степенью подавления излучения в направлении вперед вследствие того, что электромагнитное поле поперечно ($s=1$), а гравитационное — дважды поперечно ($s=2$). Это дает в угловом распределении излучения дополнительный фактор $(\theta - \pi/2)^{2|s|}$, причем $\theta - \pi/2 = \Delta\theta \sim |m|^{-1/2}$.

Другой интересной особенностью ГСИ полей всех спинов является обращение в нуль множителя B_s при $a \rightarrow M$, что видно из приведенных выше точных выражений для интенсивностей излучения. Это можно, по-видимому, объяснить ослаблением приливных гравитационных сил в γ раз при движении релятивистской частицы вдоль вырожденных изотропных направлений гравитационного поля [91]. Это как раз имеет место для прямых ультрарелятивистских круговых орбит в метрике Керра при $a \rightarrow M$.

§ 12. РАДИАЦИОННОЕ ТРЕНИЕ В ПОЛЕ КЕРРА

Построенные в § 7 функции Грина для полевых возмущений различного спина позволяют решить задачу о силе радиационного трения, которая действует на частицу, движущуюся в поле Кер-

ра и излучающую скалярные, электромагнитные или гравитационные волны [113]. Оказывается, что в силу нестатичности метрики сила радиационного трения остается отличной от нуля и для частицы, покоящейся относительно бесконечно удаленного наблюдателя, когда излучение отсутствует. Ее происхождение связано с ненулевой передачей момента импульса черной дыре от внешних полей, не обладающих аксиальной симметрией (§ 9). «Статическая» реакция излучения в метрике Керра играет, таким образом, роль противодействия приливному трению Хокинга [55]. Заметим, что помимо силы реакции излучения на частицу, покоящуюся (в указанном выше смысле) в поле Керра, действует еще «аномальная» сила, обусловленная деформацией кулоновского поля частицы во внешнем гравитационном поле [133—139]. Эта сила возникает за счет части собственного поля частицы, симметричной относительно отражения времени $t \rightarrow -t$, и исчезающей при переходе к метрике Шварцшильда. Приливное трение обусловлено нестатичностью метрики Керра (т. е. асимметрии при замене $t \rightarrow -t$), поэтому соответствующее воздействие на источник возмущений связано с t -нечетной частью собственного поля (это обстоятельство не учитывалось в более ранних расчетах приливного трения, см., например, [99]).

Радиационные функции Грина

С помощью построенных в § 7 запаздывающих функций Грина можно получить простые выражения для соответствующих радиационных функций Грина

$${}_s\mathbf{G}^{\text{grad}}(x, x') = 1/2 ({}_s\mathbf{G}^{\text{ret}}(x, x') - {}_s\mathbf{G}^{\text{adv}}(x, x')). \quad (1)$$

Учитывая вещественность запаздывающих функций, а также общее соотношение ${}_s\mathbf{G}^{\text{ret}}(x, x') = {}_s\mathbf{G}^{\text{adv}*}(x', x)$, можем переписать (12.1) в виде

$${}_s\mathbf{G}^{\text{grad}}(x, x') = 1/2 ({}_s\mathbf{G}^{\text{ret}}(x, x') - {}_s\mathbf{G}^{\text{ret}}(x', x)). \quad (2)$$

Подставляя выражение (7.111) в (2) и выделяя в явном виде радиальную часть, получим следующее представление для радиационной функции Грина:

$$\begin{aligned} {}_s\mathbf{G}^{\text{grad}}(x, x') = & \sum_{lm\omega p} 2^{1-s-\frac{|s|+s^2}{2}} i \frac{\omega}{|\omega|} (\hat{P}_s \tau_s^* Z(\theta, \varphi)) \times \\ & \times (\hat{P}_s \tau_s^* Z(\theta', \varphi'))^* e^{-i\omega(t-t')} [(-{}_s\mathcal{R}^{\text{up}}(r) - {}_s\mathcal{R}^{\text{out}*}(r') + \\ & + {}_s\mathcal{R}^{\text{down}}(r) - {}_s\mathcal{R}^{\text{in}*}(r')) \theta(r-r') + (-{}_s\mathcal{R}^{\text{in}}(r) - {}_s\mathcal{R}^{\text{down}*}(r') + \\ & + {}_s\mathcal{R}^{\text{out}}(r) - {}_s\mathcal{R}^{\text{up}*}(r')) \theta(r'-r)], \end{aligned} \quad (3)$$

где для сокращения записи у радиальных и угловых функций опущены индексы l, m, ω, p .

Для дальнейших преобразований введем «ненормированные» радиальные функции, отличающиеся от (7.66) и (7.67) отсутствием коэффициентов γ_s и δ_s .

$${}_s\chi^{\text{in}}(r) = \gamma_s {}_s\eta^{\text{in}}(r); \quad {}_s\chi^{\text{up}}(r) = \delta_s {}_s\eta^{\text{up}}(r). \quad (4)$$

Сравнивая асимптотики функций (7.66) и (7.67) при $r^* \rightarrow \pm \infty$, можно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$${}_s\eta^{\text{down}} = -{}_s\eta^{\text{up}*} = {}_s\eta^{\text{in}} - \sigma_s {}_s\eta^{\text{up}}, \quad (5)$$

$${}_s\eta^{\text{out}} = -{}_s\eta^{\text{in}*} = k_s/k \tau_s \tau_{-s}^* \varepsilon(k\omega) ({}_s\eta^{\text{up}} + \sigma_{-s}^* {}_s\eta^{\text{in}}), \quad (6)$$

где $\varepsilon(k\omega) = k\omega/|k\omega|$ — «индикатор» сверхизлучения. Заметим также, что в силу равенства (7.83), связывающего значения коэффициентов τ_s с противоположными s , выполняется соотношение

$$k_s \tau_s \tau_{-s}^* = (k_s \tau_s \tau_{-s}^*)^* = k_{-s} \tau_{-s} \tau_s^*, \quad (7)$$

т. е. эта величина вещественна.

Радиальные моды типа «in» и «up» (7.66), (7.67) нормированы таким образом, чтобы имели место формулы (7.42), (7.43) для $s = \pm 2$ и (7.54), (7.55) для $s = \pm 1$, что достигается выбором коэффициентов в соответствии с равенствами (7.80) и (7.81). Поскольку эти коэффициенты комплексны, для мод «out» и «down» формулы связи между функциями с противоположными s приобретают дополнительные множители. Чтобы найти их, подставим разложения (5) и (6) в (7.42), (7.43) и (7.54), (7.55) для $s = \pm 2$ и $s = \pm 1$ соответственно и воспользуемся соотношениями (7.80) — (7.83). В результате оказывается, что для радиальных функций ${}_s\mathcal{R}^{\text{out}}$ и ${}_s\mathcal{R}^{\text{down}}$ формулы связи (7.42), (7.43), (7.54) и (7.55) выполняются, если эти функции дополнительно умножить на 2^s . Учитывая выбор коэффициентов, выражаемый формулами (7.109), можно также написать соотношение

$${}_s\hat{\Lambda} {}_s\mathcal{R}^{\text{out(down)}} = \frac{\gamma_{-s}^* \delta_{-s}^*}{\gamma_s \delta_s} {}_{-s}\mathcal{R}^{\text{out(down)}}, \quad (8)$$

где оператор ${}_s\hat{\Lambda}$ определяется из формул (7.42), (7.43), (7.54) и (7.55) для $s = \pm 2$ и $s = \pm 1$ соответственно

$${}_2\hat{\Lambda} = \frac{\Delta^2}{4C_{lm\omega}^q} (\mathcal{D}^+)^4 \Delta^2; \quad {}_{-2}\hat{\Lambda} = \frac{4}{C_{lm\omega}^p} \mathcal{D}^4, \quad (9)$$

$${}_1\hat{\Lambda} = \frac{\Delta}{2_1C_{lm}^\gamma} (\mathcal{D}^+)^2 \Delta; \quad {}_{-1}\hat{\Lambda} = \frac{2}{1C_{lm}^\gamma} \mathcal{D}^2.$$

Вводя в формулу (3) оператор ${}_s\hat{\Lambda}$, действующий на переменную r , перепишем (3) в виде

$${}_s\mathbf{G}^{\text{rad}} = \sum_{l m \omega p} 2^{1-s-\frac{|s|+s^*}{2}} i \frac{\omega}{|\omega|} (\hat{P}_s \tau_s^* Z(\theta, \varphi)) (\hat{P}_s \tau_s^* Z(\theta', \varphi'))^* e^{-i\omega(t-t')}.$$

$${}_s\Lambda \left[\left({}_s\mathcal{R}^{\text{up}}(r) {}_s\mathcal{R}^{\text{out}*}(r') + \frac{\gamma_s \delta_s}{\gamma_{-s}^* \delta_{-s}^*} {}_s\mathcal{R}^{\text{down}}(r) {}_s\mathcal{R}^{\text{in}*}(r') \right) \theta(r-r') + \right. \\ \left. + \left({}_s\mathcal{R}^{\text{in}}(r) {}_s\mathcal{R}^{\text{down}*}(r') + \frac{\gamma_s \delta_s}{\gamma_{-s}^* \delta_{-s}^*} {}_s\mathcal{R}^{\text{out}}(r) {}_s\mathcal{R}^{\text{up}*}(r') \right) \theta(r'-r) \right]. \quad (10)$$

Учитывая (7.56) и (4), легко заметить, что в квадратных скобках стоят комбинации «ненормированных» функций

$$({}_s\eta^{\text{up}}(r) {}_s\eta^{\text{in}}(r') + {}_s\eta^{\text{up}*}(r) {}_s\eta^{\text{in}*}(r')) \theta(r-r') + \\ + ({}_s\eta^{\text{in}}(r) {}_s\eta^{\text{up}}(r') + {}_s\eta^{\text{in}*}(r) {}_s\eta^{\text{up}*}(r')) \theta(r'-r), \quad (11)$$

которые можно преобразовать с помощью (5), (6)

$${}_s\eta^{\text{up}}(r) {}_s\eta^{\text{in}}(r') + {}_s\eta^{\text{up}*}(r) {}_s\eta^{\text{in}*}(r') = \\ = \frac{\varepsilon(k\omega)}{k_s \tau_s \tau_{-s}^*} [({}_s\eta^{\text{in}*}(r) - \sigma_{-s}^* {}_s\eta^{\text{in}}(r)) {}_s\eta^{\text{in}}(r') + \\ + ({}_s\eta^{\text{in}}(r) - \sigma_{-s} {}_s\eta^{\text{in}*}(r)) {}_s\eta^{\text{in}*}(r')]. \quad (12)$$

С другой стороны, из (6) имеем

$${}_s\eta^{\text{up}*}(r) {}_s\eta^{\text{up}}(r') = \\ = (k_s/k \cdot \tau_s \tau_{-s}^*)^{-2} ({}_s\eta^{\text{in}}(r) - \sigma_{-s} {}_s\eta^{\text{in}*}(r)) \cdot ({}_s\eta^{\text{in}*}(r') - \sigma_{-s}^* {}_s\eta^{\text{in}}(r')). \quad (13)$$

Исключая из (12) и (13) члены, пропорциональные $\sigma_{\pm s}$, и используя условие сохранения потока (7.71), находим

$${}_s\eta^{\text{up}}(r) {}_s\eta^{\text{in}}(r') + {}_s\eta^{\text{up}*}(r) {}_s\eta^{\text{in}*}(r') = \\ = {}_s\eta^{\text{in}*}(r) {}_s\eta^{\text{in}}(r') + k_s/k \tau_s \tau_{-s}^* \varepsilon(k\omega) {}_s\eta^{\text{up}*}(r) {}_s\eta^{\text{up}}(r'). \quad (14)$$

Поскольку левая часть этого равенства при замене s на $-s$ переходит в комплексно-сопряженную величину, в то время как в правой части помимо комплексного сопряжения требуется замена $r \leftrightarrow r'$, можно прийти к выводу, что это выражение симметрично относительно аргументов r и r' . В результате сложения функций Хевисайда в (11), возвращения к исходным радиальным функциям и повторного применения соотношения (8) из (10) получим

$${}_s\mathbf{G}^{\text{rad}}(x, x') = \sum_{l m \omega p} 2^{1-s-\frac{|s|+s^*}{2}} i \frac{\omega}{|\omega|} \times$$

$$\times \left[\frac{\delta_{-s}^*}{\gamma_s} (\hat{P}_s \pi^{\text{out}}(l m \omega p, x)) \otimes (\hat{P}_s \pi^{\text{out}}(l m \omega p, x'))^* + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_{-s}^*}{\delta_s} \frac{k_{-s}}{k} \tau_s^* \tau_{-s} \varepsilon(\omega k) (\hat{P}_s \pi^{\text{down}}(l m \omega p, x)) \otimes (\hat{P}_s \pi^{\text{down}}(l m \omega p, x'))^* \right]. \quad (15)$$

Наконец, воспользовавшись явным видом коэффициентов δ_s и γ_s (7.109), окончательно будем иметь

$${}_s G^{\text{rad}}(x, x') = \sum_{l m \omega p} 2^{1-2s-\frac{|s|+s^2}{2}} i \frac{\omega}{|\omega|} \left[(\hat{P}_s \pi^{\text{out}}(l m \omega p, x)) \otimes \right. \\ \otimes (\hat{P}_s \pi^{\text{out}}(l m \omega p, x'))^* + \frac{k_{-s}}{k} \tau_s^* \tau_{-s} \varepsilon(k \omega) (\hat{P}_s \pi^{\text{down}}(l m \omega p, x)) \otimes \\ \left. \otimes (\hat{P}_s \pi^{\text{down}}(l m \omega p, x'))^* \right]. \quad (16)$$

Заметим, что радиационные функции Грина непрерывны в точке $r=r'$ и, будучи построенными из решений однородных волновых уравнений, удовлетворяют линеаризованным уравнениям Эйнштейна ($s=\pm 2$), уравнениям Максвелла ($s=\pm 1$) и уравнению Даламбера ($s=0$) по каждому из аргументов

$$\mathcal{E}_{\mu\nu}^{\lambda\tau}(x)_{\pm 2} G_{\lambda\tau}^{\text{rad}}(x, x') = \mathcal{E}_{\mu\nu}^{\lambda\tau}(x')_{\pm 2} G_{\lambda\tau}^{\text{rad}}(x, x') = 0, \\ \mathcal{M}_{\mu}^{\nu}(x)_{\pm 1} G_{\nu}^{\text{rad}}(x, x') = \mathcal{M}_{\mu}^{\nu}(x')_{\pm 1} G_{\nu}^{\text{rad}}(x, x') = 0, \\ \square_x G^{\text{rad}}(x, x') = \square_{x'} G^{\text{rad}}(x, x') = 0, \quad (17)$$

где $\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\tau}$ и \mathcal{M}_{μ}^{ν} — операторы, введенные в § 6.

Потери энергии и момента при излучении

Обратимся теперь к вычислению интегралов (7.157), выражающих полные потери энергии и аксиальной компоненты импульса при излучении волн заданным источником. Излучение гравитационных волн описывается формулами (7.144) (поток на дыру) и (7.152) (поток на бесконечность). Для построения $r\psi_4$ при $r \rightarrow \infty$ и $\Delta^2\psi_0$ при $r \rightarrow r_+$ используем разложения

$$r\psi_4 \underset{(r \rightarrow \infty)}{\sim} \sum_{l m \omega p} r_{-2}^{-5} R_{l m \omega p}(r) {}_2 Z_{lm}^{\gamma}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (18)$$

$$\Delta^2\psi_0 \underset{(r \rightarrow r_+)}{\sim} \sum_{l m \omega p} \Delta^2 {}_2 R_{l m \omega p}(r) {}_2 Z_{lm}^{\gamma}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (19)$$

в которых радиальные функции ${}_{\pm 2}R$ определяются путем сравнения (7.39) и (7.40) с (7.97). Учитывая (7.56), а также (7.63), (7.65) в (7.66) и (7.67), для радиальных функций в асимптотических областях получим

$$r_{-2}^{-5} R_{lm\omega p}(r)|_{r \rightarrow \infty} \propto \sqrt{2} i \omega |\omega|^{-3/2} \gamma_{-2}^{-1} e^{i\omega r} (\hat{P}_{-2} \pi_{\mu\nu}^{\text{out}}(lm\omega p; x); T^{\mu\nu}(x)), \quad (20)$$

$$\Delta^2 {}_2 R_{lm\omega p}(r)|_{r \rightarrow r_+} \propto \sqrt{2} i \omega |\omega|^{-1} |k|^{-1/2} \delta_2^{-1} \tau_2 e^{-ikr^*} \times \\ \times (\hat{P}_2 \pi_{\mu\nu}^{\text{down}}(lm\omega p; x); T^{\mu\nu}(x)). \quad (21)$$

Подставляя (20) в (18) и далее в (7.152) с учетом явного вида коэффициента γ_{-2} (7.109), находим следующее выражение для полной потери энергии и момента за счет гравитационных волн, уходящих на бесконечность:

$${}_2 \mathcal{E}_A^\infty = \sum_{lm\omega p} 2 |\omega| \left(\frac{m}{\omega} \right)^{A/3} |(\hat{P}_{-2} \pi_{\mu\nu}^{\text{out}}(lm\omega p, x), T^{\mu\nu}(x))|^2. \quad (22)$$

Здесь предполагается, что источник $T^{\mu\nu}$ остается «включенным» в течение конечного времени, в случае стационарного источника вместо (22) следует рассматривать соответствующую величину, отнесенную к единице времени.

Аналогичные вычисления с использованием (7.144), (19) и (21) дают для потерь энергии и момента источником за счет поглощения гравитационных волн черной дырой

$${}_2 \mathcal{E}_A^H = \sum_{lm\omega p} \frac{|\omega|}{128} \left(\frac{m}{\omega} \right)^{A/3} \frac{k_{-2}}{k} \tau_2^* \tau_{-2} \varepsilon(k\omega) \times \\ \times |(\hat{P}_2 \pi_{\mu\nu}^{\text{down}}(lm\omega p, x), T^{\mu\nu}(x))|^2 \quad (23)$$

(причем для $\varepsilon(k\omega) < 0$ имеет место отрицательное поглощение). В случае электромагнитных волн используем разложение

$$r\Phi_2(r)|_{r \rightarrow \infty} \propto \sum_{lm\omega p} r^{-3} {}_{-1}R_{lm\omega p}(r) {}_{-1}Z_{lm}^Y(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (24)$$

$$\Delta\Phi_0(r)|_{r \rightarrow r_+} \propto \sum_{lm\omega p} \Delta_1 R_{lm\omega p}(r) {}_1Z_{lm}^Y(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (25)$$

причем радиальные функции нетрудно найти, сопоставляя формулы (7.97) с (7.52) и (7.53). В асимптотических областях имеем

$$r_{-1}^{-3} R_{lm\omega p}(r)|_{r \rightarrow \infty} \propto \sqrt{2} i |\omega|^{1/2} \omega^{-1} \gamma_{-1}^{-1} (\hat{P}_{-1} \pi_{\mu}^{\text{out}}(lm\omega p, x), j^\mu(x)), \quad (26)$$

$$\Delta_1 R_{lm\omega p}(r)|_{r \rightarrow r_+} \propto |\omega| \omega^{-1} |k|^{-1/2} \delta_1^{-1} (Mr_+)^{-1/2} \tau_1 (\hat{P}_1 \pi_{\mu}^{\text{down}}(lm\omega p, x), j^\mu(x)). \quad (27)$$

Подстановка (26) в (24) и далее в (7.149) дает

$${}_1 \mathcal{E}_A^\infty = \sum_{lm\omega p} 4 |\omega| \left(\frac{m}{\omega} \right)^{A/3} |(\hat{P}_{-1} \pi_{\mu}^{\text{out}}(lm\omega p, x), j^\mu(x))|^2 \quad (28)$$

и аналогично для поглощения дырой

$$i\mathcal{G}_A^H = \sum_{lm\omega p} \frac{|\omega|}{4} \left(\frac{m}{\omega} \right)^{A/3} \frac{k_{-1}}{k} \tau_{1-1}^* \epsilon(k\omega) |(\hat{P}_{1-1} \pi_{\mu}^{\text{down}}(lm\omega p, x), j^{\mu}(x))|^2. \quad (29)$$

Для случая скалярных волн соответствующие выкладки элементарны, и мы их приводить не будем. Объединяя результаты с (22), (23), (28) и (29), получим для потерь энергии и момента за счет излучения на бесконечность и поглощения («суперрадиации») дырой следующие универсальные выражения, пригодные для всех трех случаев:

$$|\mathcal{G}_A^{\infty} = \sum_{lm\omega p} 2^{2|s|-s^2+1} |\omega| \left(\frac{m}{\omega} \right)^{A/3} |(\hat{P}_{-|s|} \pi^{\text{out}}(lm\omega p, x) \cdot {}_s\mathbf{J}(x))|^2, \quad (30)$$

$$|\mathcal{G}_A^H = \sum_{lm\omega p} 2^{-2|s|-s^2+1} \left(\frac{m}{\omega} \right)^{A/3} |\omega| \epsilon(k\omega) \frac{k_{-|s|}}{k} \tau_{-|s|} \tau_{|s|}^* \times \\ \times |(\hat{P}_{|s|} \pi^{\text{down}}(lm\omega p, x) \cdot {}_s\mathbf{J}(x))|^2. \quad (31)$$

Эти формулы выражают потери на бесконечности через моды, имеющие неотрицательный индекс s , и потери на горизонте через моды с неположительным индексом s . Однако с помощью формул (7.106) и (7) нетрудно перейти к величинам с произвольным s , при этом изменится лишь численный множитель.

Уравнения движения точечной частицы с учетом реакции излучения и законы сохранения

Рассмотрим сначала уравнения движения точечной частицы в заданном поле — скалярном, электромагнитном и поле гравитационных возмущений в фоновом пространстве времени с метрикой $g_{\mu\nu}(x)$ (соответствующие константы связи будут q_c , e и μ — масса частицы). Варьируя лагранжиан (4.7) по координатам частицы, взаимодействующей со скалярным полем, получим уравнение движения

$$\frac{D}{ds} [(\mu + q_c \psi(x(s))) u_{\mu}] = q_c \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}}, \quad (32)$$

где величина в квадратных скобках играет роль обобщенного импульса, $u_{\mu} = g_{\mu\nu} dx^{\nu}/ds$; $D/ds = u^{\mu} \nabla_{\mu}$ — ковариантная производная вдоль мировой линии частицы. Правая часть (32) имеет смысл 4-силы, именно эта величина и будет интересовать нас ниже.

В случае электрического заряда, движущегося в электромагнитном поле $A_{\mu}(x)$, имеем

$$\mu \frac{Du_{\mu}}{ds} = e \left(\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} u^{\nu} - \frac{dA_{\mu}}{ds} \right), \quad (33)$$

где во втором слагаемом выделена полная производная от 4-по-

тенциала A_μ вдоль мировой линии частицы (не дающая вклада в необратимые потери на излучение). Интересующая нас сила радиационного трения, следовательно, содержится в первом слагаемом в (33), который имеет вид, аналогичный правой части (32).

Наконец, уравнение движения нейтральной частицы в поле гравитационных возмущений $h_{\mu\nu}$ на фоне искривленного пространства-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$ можно получить из уравнения геодезических в пространстве-времени с метрикой $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ [189]

$$\frac{d\overset{\circ}{u}_\mu}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \overset{\circ}{u}^\alpha \overset{\circ}{u}^\beta = 0, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{u}_\mu &= \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \overset{\circ}{u}^\nu = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\nu / ds, \\ ds &= (\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} = ds (1 + h_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{1/2} \end{aligned} \quad (35)$$

(величины без волны относятся к фоновой метрике $g_{\mu\nu}$).

Разлагая по $h_{\mu\nu}$, в первом порядке получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds} \left[\left(1 - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \right) u_\mu \right] &= \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} u^\alpha u^\beta - \frac{d}{ds} h_{\mu\alpha} u^\alpha = \\ &= \frac{1}{2} u^\alpha u^\beta \nabla_\mu h_{\alpha\beta} - \frac{D}{ds} h_{\mu\alpha} u^\alpha, \end{aligned} \quad (36)$$

в правой части которого первый член также имеет структуру, аналогичную правой части (32). Левая часть (36), как и в скалярном случае, имеет смысл производной от обобщенного импульса частицы (более подробное обсуждение уравнений движения в скалярном и тензорном полях см. в [190]). Опуская полные производные и подставляя в соответствии с общей теорией в правые части (32), (33) и (36) полуразности соответствующих запаздывающего и опережающего полей, получим следующее универсальное уравнение:

$$\frac{Dp_\mu}{ds} \equiv \frac{dp_\mu}{ds} - \frac{1}{2} p^\nu u^\lambda \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = |s| f_\mu^{\text{rad}}, \quad (37)$$

где сила радиационного трения равна

$$0 f_\mu^{\text{rad}} = q_c \frac{\partial \psi^{\text{rad}}}{\partial x^\mu}, \quad (38)$$

$$1 f_\mu^{\text{rad}} = eu^\nu \frac{\partial A_\nu^{\text{rad}}}{\partial x^\mu}, \quad (39)$$

$$2 f_\mu^{\text{rad}} = \frac{1}{2} \mu u^\nu u^\lambda \frac{\partial h_{\nu\lambda}^{\text{rad}}}{\partial x^\mu} \quad (40)$$

в скалярном, электромагнитном и гравитационном случаях соответственно. Здесь символом p_μ обозначен обобщенный импульс частицы (входящий в левую часть (32) и (36)). В случае фоновой метрики Керра $g_{\mu\nu}$, не зависящей от $x^0=t$ и $x^3=\varphi$, второй член в (12.37) для временной и азимутальной компонент вклада не дает, и мы имеем

$$\frac{dp_A}{ds} = |s| f_A^{\text{rad}}, \quad A=0, 3. \quad (41)$$

В отсутствие силы радиационного трения уравнение (41) выражает закон сохранения энергии и проекции углового момента частицы на ось симметрии поля Керра. Рассмотрим теперь радиационные потери за все время движения (предполагая, что они конечны, в противном случае те же рассуждения можно провести для средней мощности)

$$|s| \mathcal{E}_A = -(-1)^A \int_{-\infty}^{\infty} |s| f_A^{\text{rad}} ds, \quad (42)$$

где знаковый множитель соответствует выбранной сигнатуре метрики. Интегрирование в (42) следует проводить по невозмущенной траектории (все рассмотрение ограничено первым приближением теории возмущений). Радиационные поля в правых частях (38) — (40) строятся с помощью функций Грина (16):

$${}_s\pi(x) = \int_s G^{\text{rad}}(x, x') \cdot {}_sJ(x') \sqrt{-g} d^4x', \quad (43)$$

где источники при различных s описываются формулой

$${}_sJ(x) = \int \delta^4(x, x(s')) (-g)^{-1/2} |s| H ds'; \quad {}_0H = q; \quad {}_1H^\mu = eu^\mu; \quad {}_2H^{\mu\nu} = \mu u^\mu u^\nu \quad (44)$$

и дельта-функция определена соотношением

$$\int \delta^4(x, x') d^4x' = 1. \quad (45)$$

После подстановки (16) в (43) интегрирование по x' выполняется с помощью дельта-функции, и остается интеграл вдоль мировой линии частицы по параметру s' — моментам «излучения». Искомое поле следует затем взять на мировой линии частицы в момент s и проинтегрировать по s . Результат можно представить в виде скалярного произведения полевых мод на функцию источника [113]

$$|s| \mathcal{E}_A = \sum_{lm\omega p} 2^{-2s-s^*+1} |\omega| \left(\frac{m}{\omega} \right)^{A/3} \left[|(\hat{P}_s \pi^{\text{out}}(lm\omega p, x) \cdot {}_sJ(x))|^2 + \right. \\ \left. + \varepsilon(k\omega) \frac{k-s}{i} \tau_{-s} \tau_s^* |(\hat{P}_s \pi^{\text{down}}(lm\omega p, x) \cdot {}_sJ(x))|^2 \right]. \quad (46)$$

В силу соотношений (7.106) и (12.7) это выражение не изменяется при замене $s \leftrightarrow -s$. Таким образом, результат не зависит от выбора калибровки потенциалов. Сравнивая (46) с выражениями для радиационных потерь, вычисленными через потоки в волновых зонах ($r^* \rightarrow \pm \infty$), можно установить соотношение

$$|s| \mathcal{G} A = |s| \mathcal{G} A^\infty + |s| \mathcal{G} A^H \quad (47)$$

для всех s и $A=0, 3$ (учитывая (7.106) и (12.7)). Таким образом, полученные на основе вычисления силы радиационного трения (локально) потери энергии и проекции углового момента на ось симметрии частицы в поле Керра совпадают с соответствующими величинами, рассчитанными в волновой зоне. Для мод с $\omega k < 0$ второе слагаемое в правой части (47) отрицательно (суперрадиация), т. е. радиационные потери меньше полной интенсивности излучения на бесконечности. При $\omega=0$ (т. е. для покоящейся частицы) потери энергии не происходит ((46) обращается в нуль для $A=0$). Однако потеря момента по-прежнему происходит, так как при $A=3$ второе слагаемое в (12.46) остается отличным от нуля. Обсудим этот эффект подробнее.

Длинноволновое приближение и статический предел

Пусть частица движется достаточно медленно, так что излучаемые частоты удовлетворяют условию $\omega M \ll 1$. В этом случае все вычисления удастся выполнить аналитически, воспользовавшись выражениями (7.134) для радиальных функций. Подставляя эти выражения в (16), находим при $r, r' \gg M$

$$\begin{aligned} {}_s G^{\text{rad}}(x, x') = & \sum_{lm\omega p} i \frac{2^{-\frac{|s|+s^2}{2}}}{[(2l+1)!]^2} (\hat{P}_s \tau^\star(x) {}_s Z(\theta, \varphi)) \otimes \\ & \otimes (\hat{P}_s \tau^\star(x') {}_s Z(\theta', \varphi'))^* e^{-i\omega(t-t')} \left\{ 2^{-4s+2l} |\gamma_s|^2 \omega^{2l-2s+1} [(l+s)!]^2 (rr')^{l+s} + \right. \\ & + \frac{|\delta_s|^2 (iq)^{2s}}{8Mr_+ k_s} \left[\frac{4(M^2 - a^2)}{rr'} \right]^{l-s+1} \times \\ & \times \left. \left| \frac{\Gamma(l+1+2iQ)(l-s)!}{\Gamma(2iQ-s)} \right|^2 \frac{\Gamma(1-s+2iQ)}{\Gamma(1+s+2iQ)} \right\}. \quad (48) \end{aligned}$$

При $\omega \rightarrow 0$ основной вклад в сумму по l в первом слагаемом в фигурных скобках дает минимальное $l=|s|$ (за исключением случая $s=0$). Во втором слагаемом сходимость ряда определяется отношением M/r . Если интересующие нас значения $r \gg M$, то основной вклад также будет давать член с $l=|s|$. Относительная величина вкладов от первого и второго слагаемого в фигурных скобках при этом будет различна, однако мы будем удерживать их оба, поскольку они имеют разный физический смысл (описывают излу-

чение уходящее на бесконечность и поглощаемое черной дырой).

Рассмотрим подробнее случай медленно движущегося заряда, взаимодействующего со скалярным полем. Будем предполагать, что нерелятивистская частица движется с угловой скоростью Ω по окружности радиуса r_0 при $\theta = \theta_0$, так что $\Omega r_0 \ll 1$, $r_0 \gg M$. Основной вклад в сумму дают слагаемые $l=1$, $m=\pm 1$ (вклады членов $l=0$, $l=1$, $m=0$ обращаются в нуль). Для радиационной части поля в точке с координатами r , θ , φ в момент времени t получаем

$$\psi^{\text{rad}}(r, \theta, \varphi, t) = \frac{q_c}{3} \sin \theta \sin \theta_0 \sin(\varphi - \Omega t) \times \\ \times \left(\Omega_0^3 r r_0 + \frac{2M^3 r_+}{(r r_0)^2} (\Omega - \Omega_H) \right). \quad (49)$$

Отсюда находим следующие значения для компонент силы радиационного трения:

$$f_t^{\text{rad}} = -\Omega f_\varphi^{\text{rad}}, \quad f_r^{\text{rad}} = f_\theta^{\text{rad}} = 0; \\ f_\varphi^{\text{rad}} = \frac{q_c^2}{3} \sin^2 \theta_0 \left[r_0^2 \Omega^3 + \frac{2M^3 r_+}{r_0^4} (\Omega - \Omega_H) \right]. \quad (50)$$

При геодезическом движении $\Omega r_0 \sim (M/r_0)^{1/2}$, поэтому второй член в квадратных скобках (поглощение дырой при $\Omega > \Omega_H$ и усиление при $\Omega < \Omega_H$) мал по сравнению с первым. Однако при негеодезическом движении вклад второго слагаемого может быть преобладающим. В частности, для частицы, удерживаемой в состоянии покоя ($\Omega=0$), временная компонента силы радиационного трения обращается в нуль (потерь энергии не происходит), однако азимутальная компонента остается отличной от нуля

$$f_\varphi^{\text{stat}} = -\frac{q_c^2}{3} \frac{aM^2}{r_0^4} \sin^2 \theta_0. \quad (51)$$

Знак этого выражения соответствует ускорению частицы в направлении вращения черной дыры (напомним, что $g_{\varphi\varphi} < 0$). Следовательно, вращение самой черной дыры в силу доказанного выше глобального сохранения момента должно замедляться. Этот эффект обсуждался в работе Хокинга и Хартля [55] и получил название приливного трения. Его связь с радиационным трением была установлена в работе [113].

Для электрического заряда ($|s|=1$) при тех же предположениях получаем снова формулы (50) с заменой q_c^2 на $2e^2$ (множитель 2 обусловлен наличием 2 поляризаций электромагнитных волн). Приведем также результаты расчета силы, действующей на точечный магнитный диполь μ , движущийся таким же образом.

В локально-статической системе отсчета компоненты силы, действующей на диполь при $\omega \rightarrow 0$, равны

$$\begin{aligned} F_{\hat{r}} &= 2g\mu_{\hat{r}}\mu_{\hat{\phi}}; \quad F_{\hat{\theta}} = g\mu_{\hat{\theta}}\mu_{\hat{\phi}}; \\ F_{\hat{\phi}} &= g(\mu_{\hat{r}}^2 + 4\mu_{\hat{r}}^2), \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$g = 4/3 M^3 r_+ (\Omega_H - \Omega) / r_0^7. \quad (53)$$

Вращательный момент, создаваемый этой силой отличен от нуля.

В случае незаряженной частицы массы $\mu \ll M$, создающей лишь гравитационные возмущения, основной вклад в радиационную функцию Грина (при тех же предположениях о характере движения) дают члены $l=2$, $m=\pm 1, \pm 2$. Оставляя лидирующие члены в каждом из двух слагаемых в фигурных скобках в (48), находим

$$\begin{aligned} h_{00}^{\text{rad}}(r, \theta, \psi, t) &= -\frac{i\mu}{10} \sum_{m=-2}^2 \sin^{|m|} \left(\frac{2}{m} \theta \right) \sin^{|m|} \left(\frac{2}{m} \theta_0 \right) e^{im(\psi - \Omega t)} \times \\ &\times \left[(m\Omega)^5 (rr_0)^2 + 8Mr_+ \frac{(M^2 - a^2)}{(rr_0)^3} k(1 + Q^2)(1 + 4Q^2) \right] \end{aligned} \quad (54)$$

(остальные компоненты $h_{\mu\nu}$ малы). Вычисление компонент силы радиационного трения в рассматриваемом приближении приводит к результату

$$\begin{aligned} {}_2f_t^{\text{rad}} &= -\Omega {}_2f_{\psi}^{\text{rad}}, \quad {}_2f_r^{\text{rad}} = {}_2f_{\theta}^{\text{rad}} = 0, \\ {}_2f_{\psi}^{\text{rad}} &= \frac{\mu^2 \Omega^5 r_0^4}{10} (\sin^2 2\theta_0 + 64 \sin^4 \theta_0) + \\ &+ \frac{16}{5} \mu^2 (\Omega - \Omega_H) \frac{{}^{\tau} M^5 r_+}{r_0^6} \sin^2 \theta_0 \left[1 + \frac{3a^2}{4M^2} (5 \sin^2 \theta_0 - 1) \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

В выражении для ${}_2f_t^{\text{rad}}$ при $\theta_0 = \pi/2$ нетрудно узнать сумму основного члена в (10.4) (при $\varepsilon = 0$), описывающего квадрупольное гравитационное излучение, уходящее на бесконечность, и поправки (10.27) на поглощение излучения черной дырой (для геодезического движения второе слагаемое в (55) мало). В статическом пределе $\Omega = 0$ азимутальная компонента силы остается конечной, ее отношение к ньютоновской силе при $r_0 \gg M$ равно

$$\frac{{}_2f_{\psi}^{\text{stat}}}{f_{\text{Newton}}} = \frac{8}{5} \frac{\mu}{M} \frac{a}{M} \left(\frac{M}{r_0} \right)^5 \left(1 + \frac{3a^2}{M^2} \right).$$

СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Основные результаты классической и квантовой теории синхротронного излучения (СИ), в создании которой основополагающее значение имели работы Д. Д. Иваненко и А. А. Соколова [191], А. А. Соколова, И. М. Тернова, Ю. Швингера и др. [192—196], изложены в целом ряде монографий и учебников [20, 197—199]. Развитие теории СИ в последующие годы было связано с исследованием эффекта радиационной самополяризации спинов электронов в магнитном поле [200—202, 20, 197—199] изучением вынужденных переходов в магнитном поле [203—206], экспериментами с мегагаусс-мишенью [207—208], астрофизическими приложениями (излучение при движении под малым углом к силовым линиям в сильном магнитном поле) [201, 209], проблемой создания устройств для генерации интенсивного излучения с целью применения в физическом эксперименте [210—212], изучением квантовоэлектродинамических процессов высшего порядка, генетически связанных с СИ [213], и т. д. (более полный список литературы можно найти в [199]).

В этой главе будет развита теория СИ релятивистских заряженных частиц, движущихся по негеодезическим орбитам в пространстве-времени Шварцшильда и Керра [64, 76, 214—215], а также дано ее обобщение на случай произвольного медленно изменяющегося гравитационного поля [216—217]. Предварительно (§ 13) рассматриваются некоторые вопросы теории СИ в плоском пространстве-времени, представляющие интерес для последующих обобщений на искривленное пространство-время.

§ 13. МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СИ; ВЛИЯНИЕ РАДИАЦИОННОГО ТРЕНИЯ; КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ

Традиционное описание СИ [20] строится на основе разложения поля излучения по плоским волнам. В случае искривленного пространства-времени, содержащего черную дыру, плоские волны не отвечают симметрии задачи, и вместо этого осуществляется разложение полей по спиновым сферическим гармоникам. Такое описание синхротронного излучения полезно сначала осуществить в пространстве Минковского. Распределение излучения по мультиполям является «дополнительным» к угловому распределению.

В случае нерелятивистских частиц испускание высших мультиполей подавлено, это находит свое отражение в отсутствии резких максимумов в угловом распределении. Для ультрарелятивистских частиц существенно именно испускание высших мультиполей, с этим можно связать сужение конуса, в который излучают быстрые частицы около направления вперед [218].

Формализм изотропной тетрады в пространстве-времени Минковского

Разложение электромагнитного поля по мультиполям наиболее просто проводится в формализме Ньюмена — Пенроуза [48—51]. Введем комплексное векторное поле

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}, \quad (1)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} — напряженности электрического и магнитного полей, и рассмотрим проекции вектора \mathbf{F} на единичный вектор в радиационном направлении $F_r = (\mathbf{F}, \mathbf{e}_r)$, а также комплексные проекции

$$F_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (F_{\theta} \pm iF_{\varphi}), \quad F_{\theta} = (\mathbf{F}, \mathbf{e}_{\theta}), \quad F_{\varphi} = (\mathbf{F}, \mathbf{e}_{\varphi}), \quad (2)$$

где \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_{θ} и \mathbf{e}_{φ} — сферические орты. В результате преобразования системы уравнений Максвелла (включая однородные уравнения, не содержащие плотности заряда и тока) получим систему из 4 уравнений для 3 комплексных функций F_r , F_{\pm} :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 F_r + \frac{\sqrt{2}}{r} \mathcal{L}_1 F_{+} &= 4\pi(\rho + J_r), \quad \mathcal{D}_0 r F_{-} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_0 F_r = 4\pi r J_{+}, \\ \mathcal{D}_1^{+} F_r + \frac{\sqrt{2}}{r} \mathcal{L}_1^{+} F_{-} &= 4\pi(\rho - J_r), \quad -\mathcal{D}_0^{+} r F_{+} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_0^{+} F_r = 4\pi r J_{-}, \end{aligned} \quad (3)$$

где \mathcal{D}_n , \mathcal{D}_n^{+} , \mathcal{L}_s , \mathcal{L}_s^{+} — операторы (4.35) — (4.37) при $a=0$, $M=0$; ρ — плотность заряда; J_r , J_{\pm} — проекции плотности тока.

Преимущество использования комплексного векторного поля \mathbf{F} состоит в возможности получения разделенных уравнений для проекций F_{\pm} . Заметим, что в силу поперечности электромагнитного поля для полного описания излучения в волновой зоне достаточно знать одну из комплексных проекций, например F_{-} . Действительно, для расходящихся волн на большом расстоянии от источника выполняются соотношения $E_{\theta} = B_{\varphi}$, $E_{\varphi} = -B_{\theta}$, т. е. $F_{-} = \sqrt{2}(E_{\theta} - iE_{\varphi})$. С помощью системы (3) нетрудно получить уравнение, которому удовлетворяет функция F_{-} . Для этого подействуем на второе уравнение из системы (3) оператором $1/r \sqrt{2} \mathcal{L}_0$, а на третье — оператором $1/r \mathcal{D}_1^{+} r$, затем полученные уравнения вычтем одно из другого. В результате для функции $\psi = r^2 F_{-}$ будем иметь

$$\left[-r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2r \frac{\partial}{\partial t} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2i \cos \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} - 1 \right) \right] \psi = 4\pi J; \quad (4)$$

где $J = r^3 [1/\sqrt{2} \mathcal{L}_0(\rho - J_r) - \mathcal{D}_1 + rJ_+]$. Разделение переменных в уравнении (4) осуществляется путем разложения

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{-i\omega t} {}_{-1}Y_{lm}(\theta, \varphi) \mathcal{R}_l^{\omega}(r) \quad (5)$$

по спиновым сферическим гармоникам (Д.16). Радиальная функция $\mathcal{R}_l^{\omega}(r)$ при этом подчиняется дифференциальному уравнению

$$\left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + [\omega^2 r^2 - 2i\omega r - l(l+1)] \right\} \mathcal{R}_l^{\omega}(r) = J_{l\omega}(r), \quad (6)$$

$$J_{l\omega}(r) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta e^{-i\omega t} {}_{-1}Y_{lm}^*(\theta, \varphi) J,$$

запаздывающее решение которого может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_l^{\omega}(r) = \frac{m_l^2}{|m|} \left[R_{l\omega}^{\text{up}}(r) \int_0^r R_{l\omega}^{\text{in}}(r') J_{l\omega}(r') \frac{dr'}{\omega} + \right. \\ \left. + R_{l\omega}^{\text{in}}(r) \int_r^{\infty} R_{l\omega}^{\text{up}}(r') J_{l\omega}(r') \frac{dr'}{\omega} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $R_{l\omega}^{\text{in}}(r)$ и $R_{l\omega}^{\text{up}}(r)$ — два линейно независимых решения соответствующего однородного уравнения, первое из которых регулярно в точке $r=0$, а второе представляет при $r \rightarrow \infty$ расходящуюся волну; ω — вронскиан, составленный из этих решений. Решения R^{in} и R^{up} выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию (функции Бесселя и Ханкеля):

$$\begin{aligned} R_{l\omega}^{\text{in}}(r) &= (-1)^l 2i \frac{(l-1)!}{(2l+1)!} (2i\omega r)^{l+1} e^{-i\omega r} \Phi(l+2, 2l+2; 2i\omega r) = \\ &= -(-i)^l \frac{2\sqrt{2\pi\omega}}{l(l+1)} r e^{-i\omega r} \frac{d}{dr} [\sqrt{r} e^{i\omega r} J_{l+1/2}(\omega r)], \\ R_{l\omega}^{\text{up}}(r) &= \frac{i(l+1)!}{4i(2l+1)!} (2i\omega r)^{l+1} e^{-i\omega r} \Phi(l+2, 2l+2, -2i\omega r) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{l+1} \frac{(2l)!}{2i l!} (2i\omega r)^{-l} e^{-i\omega r} \Phi(-l+1, -2l, 2i\omega r) = \\
 & = i^l \frac{\sqrt{2\pi\omega}}{4} r e^{-i\omega r} \frac{d}{dr} [V \bar{r} e^{i\omega r} H_{l+1/2}^{(1)}(\omega r)], \quad (8)
 \end{aligned}$$

при этом вронскиан $\omega = 2i\omega$.

Распределение мощности СИ по мультиполям

Для случая движения заряда e по круговой траектории радиуса r_0 с угловой скоростью ω_0 в плоскости, ортогональной полярной оси, находим [218]

$$\begin{aligned}
 F_- = 4\pi e \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{-im\omega_0 t} \frac{R_{l,m\omega_0}(r)}{mr^2} {}_{-1}Y_{lm}(\theta, \varphi) \sqrt{\frac{|m|(-i)^{l+1}}{|m|l(l+1)}} \times \\
 \times \left[Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \frac{d}{dr} (V \bar{r} J_{l+1/2}(\omega r)) - \right. \\
 \left. - i\omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) (V \bar{r} J_{l+1/2}(\omega r)) \right]_{r=r_0}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Введем мультипольные параметры Стокса $I_{lm}, J_{lm}^\lambda, \lambda=1, 2, 3$, на основании соотношения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta E_i E_i = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \left(I_{lm} \frac{\delta_{ij}}{2} + \sum_{\lambda=1}^3 J_{lm}^\lambda \sigma_{ij}^\lambda \right), \quad (10)$$

где σ_{ij}^λ — матрицы Паули. Полная мощность излучения при этом будет равна

$$I = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta (E_\theta^2 + E_\varphi^2) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l I_{lm}. \quad (11)$$

Определяя компоненты электрического поля из разложения (13.9), находим

$$J_{lm}^1 = J_{lm}^2 = 0, \quad (12)$$

что свидетельствует об отсутствии круговой поляризации проинтегрированного по углам излучения мультиполя с заданными l и m . Отличные от нуля параметры Стокса определяются формулами

$$\begin{aligned}
 I_{lm} = \frac{4\pi^2 e^2 \omega}{l(l+1)} \left\{ \left| Y_{lm} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right|^2 \left[\frac{d}{dr_0} (V \bar{r}_0 J_{l+1/2}(\omega r_0)) \right]^2 + \right. \\
 \left. + \omega_0^2 \left| \frac{dY_{lm}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\pi/2}^2 r_0^2 J_{l+1/2}^2(\omega r_0) \right\},
 \end{aligned}$$

$$J_{lm}^3 = \frac{2\pi^2 e^2 \omega}{l(l+1)} \left[-1 + \frac{|m|(2l+1)}{l(l+1)} \right] \left\{ \left| Y_{lm} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right|^2 \left[\frac{d}{dr_0} (V \sqrt{r_0} J_{l+1/2}(\omega r_0)) \right]^2 - \right. \\ \left. - \omega_0^2 \left| \frac{dY_{lm}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\pi/2}^2 \cdot r_0 J_{l+1/2}^2(\omega r_0) \right\}, \quad (13)$$

в которых значения сферических функций и их производных при $\theta = \pi/2$ следует взять из (Д.17).

Нетрудно показать, что мультипольное разложение излучения нерелятивистской частицы ($\omega_0 r_0 \ll 1$), быстро сходится:

$$I_{lm} = \frac{2^{2l+3} \pi e^2 \omega}{l(l+1)r_0} \left[\frac{l!}{(2l+1)!} \right]^2 (\omega r_0)^{2l+1} \left[(l+1)^2 \left| Y_{lm} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right|^2 + \right. \\ \left. + \omega_0^2 r_0^2 \left| \frac{dY_{lm}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\pi/2}^2 \right], \quad (14)$$

$$J_{lm}^3 = \frac{2^{2l+2} \pi e^2 \omega}{l(l+1)r_0} \left[\frac{l!}{(2l+1)!} \right]^2 (\omega r_0)^{2l+1} \left[-1 + \frac{|m|(2l+1)}{l(l+1)} \right] \times \\ \times \left[(l+1)^2 \left| Y_{lm} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right|^2 - \omega_0^2 r_0^2 \left| \frac{dY_{lm}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\pi/2}^2 \right]. \quad (15)$$

В случае ультрарелятивистского движения основной вклад в излучение дают мультиполи с $l \gg 1$, $|m| \gg 1$. Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться асимптотическими разложениями бесселевых функций при больших значениях индекса в терминах функций Макдональда $K_{1/3}$, $K_{2/3}$ [197]. Вводя обозначения

$$\psi^2 = 2\gamma^2 \frac{l-m}{m}, \quad y = \frac{2}{3} m \gamma^{-3}, \\ z = \frac{3}{2} y (1 + \psi^2)^{3/2}, \quad \gamma = (1 - \omega_0^2 r_0^2)^{-1/2}, \quad (16)$$

будем иметь (считаем $m > 0$)

$$I_{lm} = \frac{4e^2 m}{3\pi^2 \gamma^3} \frac{1 + \psi^2}{\psi} \left[\psi^2 K_{1/3}^2(z) \sin^2 \frac{\pi}{2} (l-m) + \right. \\ \left. + (1 + \psi^2) K_{2/3}^2(z) \cos^2 \frac{\pi}{2} (l-m) \right], \quad (17)$$

$$J_{lm}^3 = \frac{2e^2 m}{3\pi^2 \gamma^3} \frac{1 + \psi^2}{\psi} \left[\psi^2 K_{1/3}^2(z) \sin^2 \frac{\pi}{2} (l-m) - \right. \\ \left. - (1 + \psi^2) K_{2/3}^2(z) \cos^2 \frac{\pi}{2} (l-m) \right]. \quad (18)$$

Ввиду быстрого убывания функций Макдональда при больших значениях аргумента эффективная область изменения $|m|$ про-

стирается до значений порядка γ^3 , а область изменения числа l ограничена неравенством

$$\frac{l-|m|}{|m|} \leq \gamma^{-2}. \quad (19)$$

Существует простое соотношение между угловым распределением излучения ультррелятивистской частицы, усредненным по азимутальному углу, и распределением излучения по мультиполям. Вычислим среднее значение $\cos^2 \theta$ по спиновым сферическим гармоникам при $l \gg 1$, $|m| \gg 1$:

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = 2\pi \int_0^\pi |_{-1} Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{\Gamma \Psi^2}{2\gamma^2}. \quad (20)$$

Видно, что при фиксированном значении номера гармоники m излучение мультиполя с заданным l (т. е. согласно (16) с заданным ψ^2) отвечает определенному среднему значению угла излучения по отношению к плоскости орбиты, причем зависимость $\langle \cos^2 \theta \rangle$ от l монотонна. Учитывая квазинепрерывность распределения по l и m при больших значениях этих чисел, перейдем от суммирования к интегрированию по ψ и y

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l I_{lm} = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} d\psi \frac{dI}{d\psi dy}; \quad \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l J_{lm}^3 = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} d\psi \frac{dJ^3}{d\psi dy}. \quad (21)$$

Подставляя (13.17) и (13.18) в (13.21), будем иметь

$$\frac{dI}{d\psi dy} = \left(\frac{3ey\gamma^2}{2\pi} \right)^2 (1 + \psi^2) [\psi^2 K_{1/3}^2(z) + (1 + \psi^2) K_{2/3}^2(z)], \quad (22)$$

$$\frac{dJ^3}{d\psi dy} = \left(\frac{3ey\gamma^2}{2\pi} \right)^2 \frac{1 + \psi^2}{2} [\psi^2 K_{1/3}^2(z) - (1 + \psi^2) K_{2/3}^2(z)]. \quad (23)$$

Интегрирование (22) по ψ и y приводит к известному выражению для полной мощности синхротронного излучения

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{r_0^2} \gamma^4 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{r_0^2} \left(\frac{E}{\mu} \right)^4. \quad (24)$$

Заметим, что хотя формула (22), выражающая распределение мощности излучения по мультиполям, внешне схожа с формулой для спектрально-углового распределения СИ [20], однако параметр ψ в нашем случае имеет иной смысл (см. (13), (16)).

Полученное выше выражение (9) для электромагнитного поля заряда, движущегося по окружности, справедливо при всех $r > r_0$. Аналогичное выражение в терминах разложения по цилиндрическим функциям см. в [219].

Классическое радиационное трение

Движение и излучение релятивистского электрона в однородном магнитном поле имеет различный характер в зависимости от величины трех параметров: отношения силы радиационного трения к силе Лоренца

$$\eta = \frac{2}{3} \alpha \left(\frac{B_l}{B_e} \right) \left(\frac{E}{\mu} \right)^2, \quad \alpha = \frac{1}{137}; \quad B_e = \frac{m_e^2}{e} = 4,41 \cdot 10^{13} \text{ Гс}, \quad (25)$$

параметра, определяющего квантовую отдачу при излучении,

$$\chi = \frac{B}{B_e} \cdot \frac{E}{\mu}, \quad (26)$$

и параметра, определяющего квантование орбитального движения

$$f = \frac{B}{B_e} \quad (27)$$

(в дальнейшем рассматривается только случай $f \ll 1$).

На рис. 9 изображена плоскость E/μ , B_e/B , которая разбивается линиями $\eta=1$ и $\chi=1$ на три области: I. $\eta < 1$, $\chi < 1$ — область классического движения с малым радиационным трением; II. $\eta > 1$, $\chi < 1$ — область классического движения с большим радиационным трением; III. $\chi > 1$ — квантовая область, в которой классическое представление о радиационном трении теряет смысл (кривая $\eta=1$ изображена пунктиром). В области I влияние радиационного трения на движение электрона можно считать адиабатическим, при этом радиус вращения мало меняется за время одного оборота. В области II энергия электрона может существенно уменьшиться во время одно-

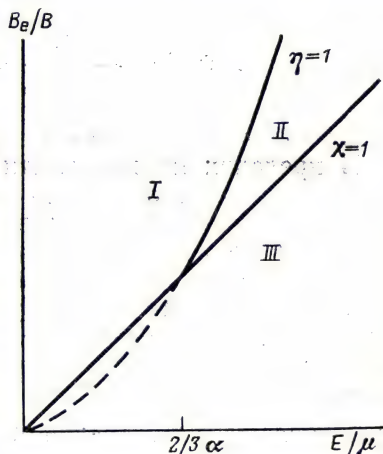


Рис. 9. Области классического незатухающего (I), затухающего (II) и квантового движения (III) электрона в магнитном поле

го оборота. Однако и в этом случае влияние радиационного трения на мгновенные характеристики излучения остается адиабатическим [207]. Это связано с тем, что излучение релятивистской частицы, происходящее преимущественно на высоких гармониках

основной частоты, формируется на малом участке траектории длины $\Delta l \sim r_0/\gamma$, где r_0 — мгновенный радиус кривизны. Отношение работы силы трения на этом участке к энергии частицы равно $\Delta A/E = 2/3\alpha\chi$, что заведомо мало в классической области.

Таким образом, независимо от величины параметра η мгновенное излучение при $\chi \ll 1$ описывается формулами (22), (23) с адиабатически изменяющимися параметрами. Ниже рассматриваются спектрально-угловые характеристики и поляризация полного излучения релятивистской частицы с учетом радиационного трения в классической области (I—II).

Энергия частицы, движущейся в магнитном поле, изменяется вследствие излучения по закону

$$E(t) = \mu \frac{E(0) + \mu \operatorname{th} \delta t}{E(0) \operatorname{th} \delta t + \mu}, \quad (28)$$

где $\delta = {}^2/3\alpha(B/B_e)^2\mu$. Через время $t \sim \delta^{-1}$ энергия становится порядка массы покоя:

$$E \simeq \mu \frac{E(0) + 0,8\mu}{0,8E(0) + 1} \simeq 1,2\mu \quad (E(0) \gg \mu). \quad (29)$$

В случае движения под углом к магнитному полю будет зависеть от времени также и угол между направлением скорости и магнитным полем:

$$\operatorname{tg} \psi(s) = \frac{v_{\perp}(s)^{1/2}}{v_{\parallel}} = \operatorname{tg} \psi(0) e^{-\delta s}; \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\mu}{E}. \quad (30)$$

Спектр и поляризация интегрального излучения

В пределах применимости классической теории поправки к мгновенной интенсивности излучения вследствие радиационного трения пренебрежимо малы. Действительно, интенсивность излучения определяется ускорением в собственной системе отсчета. Поскольку сила радиационного трения перпендикулярна к силе Лоренца, эти векторы преобразуются различным образом при переходе к системе покоя электрона. Оказывается, что даже при $\eta \gg 1$ (т. е. если в лабораторной системе сила радиального трения является доминирующей) в собственной системе отсчета электрона отношение силы трения к силе Лоренца равно $\frac{2}{3}\alpha \frac{B}{B_e} \cdot \frac{E}{\mu}$ и, следовательно, в α раз меньше квантового параметра χ , предполагаемого малым.

Спектральное распределение полной излученной энергии может быть поэтому найдено интегрированием по времени выражения для мгновенного спектрального распределения интенсивности излучения. Учитывая, что при усреднении по времени дискретный

мгновенный спектр размывается, перейдем к непрерывному спектральному распределению

$$\mathcal{G}(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \delta(\omega - m\omega_B(t)) I_m(t), \quad (31)$$

где $I_m(t)$ — мгновенная мощность излучения гармоники m основной частоты $\omega_B(t) = eB/E(t)$, для которой удобно воспользоваться шоттовским выражением (см. [197]). Проинтегрировав по времени с помощью δ -функции, получим

$$\mathcal{G}(\omega) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{2e^4 B^2}{\delta\omega_B(\infty) \gamma_m^2 \mu^2 v_m} \left\{ J'_{2m}(2mv_m) - \frac{m}{\gamma_m^2 v_m^2} \int_0^{v_m} J_{2m}(2m\xi) d\xi \right\};$$

$$v_m = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{m\omega_B(\infty)} \right)^2}; \quad \gamma_m = m \frac{\omega_B(\infty)}{\omega}. \quad (32)$$

Пределы суммирования определяются из условия обращения в нуль аргумента δ -функции

$$m_1 = 1 + \left[\frac{\omega}{\omega_B(\infty)} \right]; \quad m_2 = \left[\frac{\omega}{\omega_B(0)} \right], \quad (33)$$

где квадратными скобками обозначена целая часть. Спектр обрывается снизу на частоте $\omega_B(\infty)$.

Из рис. 10 ясно, что число членов суммы растет с увеличением частоты, причем большая часть кривых $m\omega_B(t)$ пересекается прямой $\omega = \text{const}$ в области $t \leq \delta^{-1}$, когда электрон еще является релятивистским. Поэтому при $\omega \gg \omega_B(\infty)$ можно с достаточной точностью

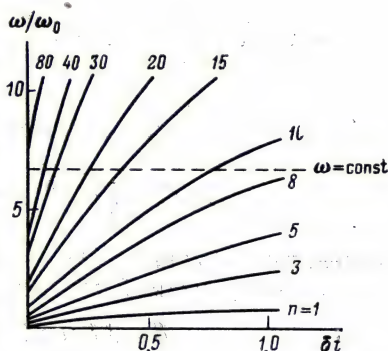


Рис. 10. Зависимость частоты гармоники ω от времени (в единицах ω_0) для $E(0)/\mu = 10$

воспользоваться аппроксимацией функций Бесселя функциями Макдональда [20], справедливыми в ультрарелятивистской области. Учитывая, что при $\omega \gg \omega_B(0)$ число членов в сумме (32) становится большим, перейдем от суммирования по m к интегрированию по v_m :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2\omega}{\pi\sqrt{3}\delta} \int_{v_0}^{v_0} dv \left[2\sqrt{1-v^2} K_{2/3} \left(\frac{2\omega(1-v^2)}{3\omega_0} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2\omega}{\omega_0} \int_0^1 dx (1-v^2x^2)^{1/2} K_{1/3} \left(\frac{2\omega}{3\omega_0} \frac{(1-v^2x^2)^{3/2}}{(1-v^2)^{1/2}} \right) \right]. \quad (34)$$

В результате преобразований с использованием рекуррентных соотношений для функций Макдональда выражение для спектра полной энергии излучения представим в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2}{3} \frac{B_e}{B} \frac{f(x)}{\gamma_0}; \quad f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi\sqrt{x}} (F(x) - F(\gamma_0^2 x)), \\ F(x) = \int_x^\infty (y^{3/2} - x^{3/2}) K_{5/3}(y) dy, \\ x = \frac{2}{3} \frac{\omega}{\mu} \frac{B_e}{B\gamma_0^2}. \quad (35)$$

Эта формула получена при условии $\gamma_0 \gg 1$, при этом интеграл от функции $f(x)$ равен единице.

Значения функции $F(x)$ в существенной области изменения аргумента приведены в [208]. При малых x справедливо следующее разложение:

$$F(x) = \frac{13}{72\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{5}{12}\right) + \\ + \pi\sqrt{3} \left(\frac{x^{3/2}}{3} - 2^{5/3} \cdot \frac{3}{5} \frac{x^{5/6}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{2^{1/3}}{26} \frac{x^{13/6}}{\Gamma(2/3)} + \dots \right). \quad (36)$$

Асимптотическое разложение при $x \gg 1$ имеет вид

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \left(\frac{3}{2} + \frac{55}{48} \frac{1}{x} + \dots \right). \quad (37)$$

Интегрально функция $f(x)$ правильно описывает спектр, поскольку с рассматриваемой точностью

$$\mathcal{E} = \int \mathcal{E}(\omega) d\omega = E(0) \simeq E(0) - \mu. \quad (38)$$

Функция $f(x)$ имеет максимум при $x=0,075$, что соответствует частоте порядка $^{3/2}\omega_0$ (строго говоря, для выяснения формы спектра в этой области следует обратиться к точной формуле (32)).

Если электрон находится в поле конечное время T , за которое не происходит полного высвечивания, то спектральная функция будет определяться выражением

$$f_T(x) = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi\sqrt{x}} [F(x) - F(x_T)], \quad x_T = x \left(\frac{\gamma_T}{\gamma_0} \right)^2. \quad (39)$$

В этом случае положение максимума соответствует частоте $^{3/2}\omega_0\gamma_T^2$ и определяется конечной энергией электрона. Отметим, что в обоих случаях положение максимума в спектральном распределении практически не зависит от начальной энергии электрона, а определяется конечной энергией.

Для оценки углового распределения полного излучения можно вычислить отношение полной энергии излучения, испускаемого перпендикулярно плоскости орбиты, к энергии излучения, испускаемого в плоскости орбиты:

$$\frac{(d\mathcal{E}/d\Omega)_{\theta=\pi/2}}{(d\mathcal{E}/d\Omega)_{\theta=0}} \simeq \frac{4}{3} \left(\frac{m}{E(0)} \right)^2. \quad (40)$$

Из этой формулы видно, что степень направленности полного излучения меньше, чем соответствующая величина для мгновенного излучения в начальный момент времени.

Для описания поляризации полного излучения выберем в качестве независимых векторов поляризации вектор, направленный вдоль проекции магнитного поля на плоскость, ортогональную к линии наблюдения (θ) и вектор, перпендикулярный этому направлению (φ). Тогда для степени поляризации полного излучения получим

$$P = \frac{\mathcal{E}_\varphi - \mathcal{E}_\theta}{\mathcal{E}_\varphi + \mathcal{E}_\theta} = \frac{3}{2} \frac{\Phi(x) - \Phi(\gamma_0^2 x)}{F(x) - F(\gamma_0^2 x)};$$

$$\Phi(x) = \int_x^\infty \sqrt{y} K_{2/3}(y) dy. \quad (41)$$

Значения функции $\Phi(x)$ приведены в [208]. При малых x справедливо разложение

$$\Phi(x) \cong \frac{1}{12\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{5}{12}\right) + \sqrt{3}\pi \left(\frac{3}{13} \frac{x^{13/6}}{2^{2/3} \Gamma(2/3)} - \frac{x^{5/6} 2^{2/3}}{\Gamma(1/3)} - \frac{2}{5} \right) + \dots \quad (42)$$

При больших x

$$\Phi(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \left(1 + \frac{7}{72} \frac{1}{x} - \frac{1463}{10368} \frac{1}{x^2} + \dots \right). \quad (43)$$

Спектральное распределение и поляризация полного излучения при некоторых значениях начальной энергии $E(0) = m\gamma_0$ показаны на рис. 11 и 12.

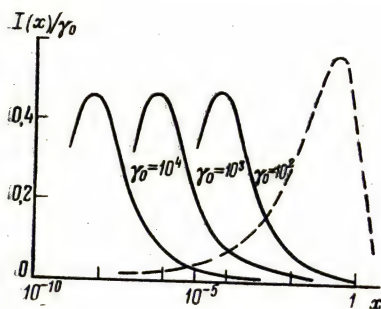


Рис. 11. Спектральное распределение полного излучения электрона в магнитном поле

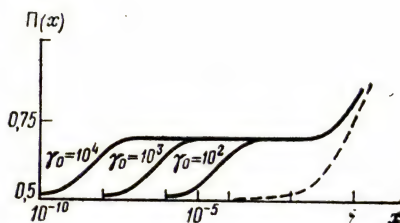


Рис. 12. Поляризация полного излучения при различных значениях начальной энергии. Пунктирная кривая изображает поляризацию без учета торможения излучением

Вероятность перехода с переворотом спина при произвольной энергии электрона

Если параметр χ , характеризующий отдачу при излучении фотона, не является малым, следует воспользоваться результатами точной квантовой теории СИ [200, 20]. Выражение для спектрального распределения мощности излучения, применимое при произвольных χ , имеет вид

$$\frac{dI}{du} = \frac{e^2 \mu^2}{\pi \sqrt{3}} \frac{u}{(1+u)^3} \left[\int_y^\infty K_{5/3}(x) dx + \frac{u^2}{1+u} K_{2/3}(y) \right], \quad (44)$$

где $u = \omega/(E - \omega)$, $y = 2u/3\chi$; E — энергия частицы (в системе единиц $\hbar = c = 1$). Приведем первые поправки к полной мощности СИ электрона, усредняя по спиновым состояниям [194, 200]

$$I = I_{\text{кл}} \left(1 - \frac{55\sqrt{3}}{16} \chi + 48\chi^2 + \dots \right), \quad (45)$$

где $I_{\text{кл}}$ определяется формулой (24). В случае $\chi \gg 1$ спектральное распределение СИ изменяется существенно. Однако и при малых χ квантовый характер излучения релятивистских частиц приводит к важным новым физическим эффектам — квантовому уширению орбит и самополяризации спинов электронов в магнитном поле [20]. Эффект самополяризации обусловлен асимметрией квантовых переходов электронов в магнитном поле, происходящих с переворотом спина относительно начальной ориентации спина. Формула для вероятности переходов в случае ультрарелятивистских энергий была впервые получена А. А. Соколовым и И. М. Терновым [200] и имеет при $\chi \ll 1$ простой вид

$$\omega_{\zeta} = \frac{5\sqrt{3}}{16} e^2 m \left(\frac{B}{B_e} \right)^3 \gamma^2 \left(1 + \zeta \frac{8\sqrt{3}}{15} \right), \quad (46)$$

где квантовое число $\zeta = \pm 1$ соответствует ориентации спина электрона по (против) направлению магнитного поля. Как видно, вероятность перехода из начального состояния со спином вдоль поля выше, чем вероятность обратного перехода, в результате чего пучок электронов в магнитном поле по истечении времени $\tau \sim \omega^{-1}$ будет поляризованным.

Выражение для вероятности квантовых переходов с переворотом спина, применимое при произвольных значениях отношения E/μ в случае $\chi \ll 1$, было получено в [202]

$$\begin{aligned} \omega_{\zeta} = & \frac{e^2 \mu}{2v} \left(\frac{B}{B_e} \right)^3 \left(\frac{\mu}{E} \right)^5 \sum_{v=1}^{\infty} v^2 \left\{ J'_{2v}(2v\nu) + \left(\frac{\mu}{E} \right)^2 \frac{1}{2v\nu} J_{2v}(2v\nu) + \right. \\ & + \left(\frac{\mu}{2E} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{v^2 v^2} \right) \int_0^{2v\nu} J_{2v}(x) dx - \left(\frac{\mu}{4Ev\nu} \right)^2 \int_0^{2v\nu} J_{2v}(x) dx + \\ & \left. + \zeta \frac{\mu}{Ev} \left[J_v(2v\nu) + \frac{1}{2v\nu} \int_0^{2v\nu} J_{2v}(x) dx \right] \right\}. \quad (47) \end{aligned}$$

Для случая слабoreлятивистских частиц скорость $v \ll 1$, сохраняя в (47) основные члены, получим

$$\omega_{\zeta} = \frac{2}{3} e^2 \mu \left(\frac{B}{B_e} \right)^3 \left((1 - 3,3v^2) \frac{1 + \zeta}{2} + v^4 k \frac{1 - \zeta}{2} \right), \quad (48)$$

где k — численный коэффициент порядка единицы (см. также [220]).

Из этой формулы видно, что вероятность переходов с переворотом спина при $v \ll 1$ еще сильнее зависит от начальной ориентации спина, чем в случае высоких энергий, описываемом формулой (46). Причина заключается в том, что член, пропорциональный $(1 + \zeta)/2$ в (48), отвечает переходам без изменения орбитального квантового числа, а второй член в (48) обусловлен переходами с изменением орбитального числа на два, которые в нерелятивистском случае сильно подавлены. Таким образом, состояние нерелятивистской частицы со спином против поля ($\zeta = -1$) оказывается относительно еще более устойчивым, чем соответствующее состояние ультрарелятивистской частицы. В сильном магнитном поле поперечный импульс не может иметь больших значений и, следовательно, электроны должны быстро поляризоваться. В случае магнитного поля «пульсарной» величины $B/B_e \sim 10^{-2}$ время перехода из состояния $\zeta = 1$ в состояние $\zeta = -1$

для нерелятивистской частицы при $v \sim 10^{-5}$ имеет порядок 10^{-13} с, а время обратного перехода — 10^7 с, так что поляризация практически является стопроцентной [221].

§ 14. СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЧЕРНЫХ ДЫР

Длина дуги формирования высокочастотного импульса

Следует ожидать, что спектральное распределение излучения ультрарелятивистских заряженных частиц, движущихся в искривленном пространстве-времени по геодезическим и негеодезическим траекториям, будет существенно различным. Геодезическая, по которой движется ультрарелятивистская частица, близка к мировой линии светового луча (с точностью до величин порядка $1/\gamma^2$, $\gamma \gg 1$ — лоренцев фактор частицы (§ 3)). Распространение высокочастотного импульса излучения можно рассматривать в рамках геометрической оптики. Поскольку ультрарелятивистская частица излучает в узкий конус около направления движения, траектория испускаемого высокочастотного импульса будет близка к траектории самой частицы, вследствие чего длина участка траектории, с которого «собирается» импульс излучения в заданном направлении, увеличится в γ раз по сравнению с длиной дуги формирования СИ в плоском пространстве-времени [173] $\Delta l_{\text{си}} \sim r_0/\gamma$, где r_0 — мгновенный радиус кривизны траектории (рис. 13, а). Частица, движущаяся со скоростью, близкой к ско-

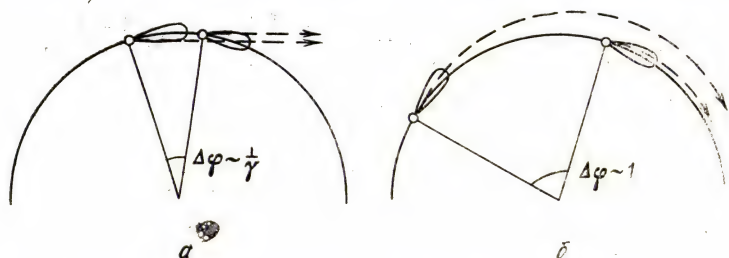


Рис. 13. Длина формирования высокочастотного импульса излучения ультрарелятивистской частицы, движущейся по окружности в плоском пространстве-времени (а), вблизи круговой светогодезической (б)

рости света, проходит этот участок пути за время $\Delta t' \sim \Delta l$, и длительность импульса, регистрируемого удаленным наблюдателем с учетом запаздывания, будет порядка

$$\Delta t \sim (\Delta t')/\gamma^2 \sim \Delta l_{\text{си}}/\gamma^2. \quad (1)$$

Характерная частота в спектре излучения $\omega \sim (\Delta t)^{-1}$, т. е.

$$\omega_{\text{си}} \propto \gamma^3 / r_0 \propto \omega_0 \gamma^3 \quad (2)$$

превосходит в γ^3 раз частоту основного тона $\omega_0 \propto 1/r_0$. Если же ультрарелятивистская частица движется по геодезической, то испускаемый импульс распространяется вдоль близкой кривой на расстояние порядка

$$\Delta l_{\text{ГСИ}} \propto r_0 \quad (3)$$

(рис. 13, б), поэтому длина дуги формирования импульса излучения в заданном направлении к асимптотически удаленному наблюдателю уже не содержит малого множителя $1/\gamma$. Поэтому характерная частота в спектре ГСИ оказывается в γ раз меньше величины (2), т. е.

$$\omega_{\text{ГСИ}} \propto \gamma^2 / \Delta l_{\text{ГСИ}} \propto \gamma^2 / r_0 \propto \omega_0 \gamma^2, \quad (4)$$

как это и следует из расчетов, проведенных в предыдущей главе.

Здесь мы рассмотрим излучение релятивистских заряженных частиц, движущихся по круговым орбитам в экваториальной плоскости шварцшильдовой и керровской черных дыр при наличии внешнего магнитного поля (соответствующие траектории были описаны в § 3). На примере этой задачи можно проследить переход от режима синхротронного излучения в плоском пространстве-времени к режиму геодезического синхротронного излучения.

Излучение скалярных волн

Выясним особенности излучения в синхротронном режиме сначала на модельном примере излучения скалярных волн частицей, обладающей электрическим e и скалярным q_c зарядами, которая движется по круговым траекториям радиуса r_c вокруг керровской черной дыры, погруженной в однородное магнитное поле. Будем предполагать, что безмассовое вещественное скалярное поле ψ взаимодействует с гравитационным полем минимальным образом. Задача сводится к решению уравнения (7.123) при $s=0$ с источником, описываемым формулой (11.35), в которую следует подставить параметры траектории (3.63) — (3.65). Повторяя стандартные вычисления, получим для радиальной функции $R_{lm\omega}$, ($\omega = m\omega_0$) выражение

$$R_{lm\omega} = 2 \sqrt{2\pi} q_c \frac{\omega}{|\omega|} (u^0)^{-1} [(r_0^2 + a^2)(r^2 + a^2)]^{-1/2} S_{lm}^{a\omega} \left(\frac{\pi}{2} \right) \times \\ \times [\chi_{lm\omega}^{\text{up}}(r) \chi_{lm\omega}^{\text{in}}(r_0) \theta(r - r_0) + \chi_{lm\omega}^{\text{in}}(r) \chi_{lm\omega}^{\text{up}}(r_0) \theta(r_0 - r)], \quad (5)$$

где введены новые радиальные функции в соответствии с (7.56). Воспользовавшись формулами (4.27) и (4.22) для мощности излучения, уходящего на бесконечность и поглощаемого черной дырой, получим

$$I^{\text{out}} = \sum_{l,m>0} C_{lm} |\chi_{lm\omega}^{\text{in}}(r_0)|^2; I^{\text{in}} = \sum_{l,m>0} \frac{\omega k}{|\omega k|} C_{lm} |\chi_{lm\omega}^{\text{up}}(r_0)|^2 |\tau|^2,$$

$$C_{lm} = 2m\omega_0 q_c^2 (u^0)^{-2} (r_0^2 + a^2)^{-1} \left| S_{lm}^{\omega} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right|^2. \quad (6)$$

Частица, движущаяся с нерелятивистской скоростью, как и в случае плоского пространства-времени, излучает в основном на частоте основного тона, этому соответствуют мультиполь $l = |m| = 1$. Применяв приближенные формулы для радиальных функций, справедливые при условии $M\omega \ll 1$ (см. § 4), которое заведомо выполнено в нерелятивистском случае, находим

$$I^{\text{out}} = \frac{q_c^2}{3} \omega_0^4 (M^2 - a^2) f(r_0) [(1 + 2x)^2 + 4Q^2], \quad (7)$$

$$I^{\text{in}} = \frac{3}{2} q_c^2 \frac{\omega_0}{kMr_+} \frac{f(r_0)}{1 + 4Q^2} [(1 + 2x) \sin \alpha + 2Q \cos \alpha]^2, \quad (8)$$

где

$$Q = -\frac{Mr_+}{r_+ - M} k; \quad x = \frac{r - r_+}{2(r_+ - M)}; \quad \alpha = Q \ln \frac{x}{x + 1}, \quad (9)$$

$$f(r_0) = [\Delta(r_0)]^{-1} \left(1 - \frac{2M}{r_0} \right)^2 \left(r_0^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r_0} \right). \quad (10)$$

Интенсивность излучения, падающего на дыру, содержит осциллирующий фактор. Это связано с тем, что вследствие рассеяния на потенциальном барьере «уходящее» решение содержит в ближней зоне падающую и отраженную волны, между которыми возникает интерференция.

Обратимся теперь к вычислению мощности скалярного излучения ультрарелятивистской частицы, движущейся по круговой траектории, достаточно удаленной от замкнутой фотонной орбиты. В этом случае излучаются высокие гармоники частоты обращения и для нахождения интенсивности излучения I^{out} (величина I^{in} экспоненциально мала из-за малости коэффициента прохождения) достаточно вычислить значение радиальной функции χ^{in} в точке r_0 в приближении высоких частот. В отличие от случая ГСИ (§ 11) сшивание квазиклассических решений здесь необходимо провести не в вершине потенциального барьера, а на его спадающем участке (рис. 14). Действительно, из уравнения ${}_0V(r_t, \omega) = 0$ (${}_0V$ — эффективный потенциал (7.58) при $s=0$), которое определяет положение «точки поворота» r_t , с учетом выражения (3.65) для частоты обращения при $\gamma \gg 1$ находим

$$r_t - r_0 \simeq \frac{\Delta_0}{r_0 g} \left[\frac{r_0^2 \Omega_0^2}{\gamma^2} + 2 \frac{l - |m|}{|m|} \sqrt{1 - a^2 \Omega_0^2} \right], \quad (11)$$

где

$$g = \Omega_0^2 (3r_0^2 + a^2) - 1. \quad (12)$$

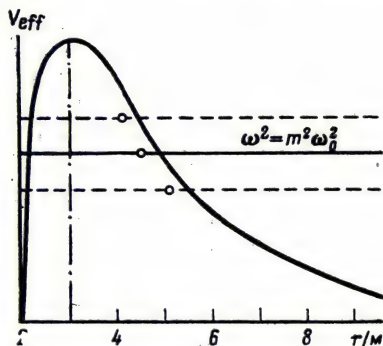


Рис. 14. Эффективный потенциал в радиальном волновом уравнении. Кружками обозначены положения ультрарелятивистских орбит заряженных частиц. Пересечение горизонтальных линий с кривой V_{eff} задает положение точек поворота, в которых производится сшивание квазиклассических решений

Уравнение (7.57) в окрестности точки r_t принимает вид

$$\frac{d^2\chi}{dq^2} - q\chi = 0; \quad q = - \left(\frac{m^2 \Delta r g}{(r^2 + a^2)^3} \Big|_{r=r_t} \right)^{1/3} (r^* - r_t^*). \quad (13)$$

Его решением, имеющим асимптотику типа χ^{in} , является функция Эйри $\Phi(q)$. Нормируя решение в соответствии с принятым в § 7 соглашением (при $\gamma_0=1$) и переходя к функции Макдональда $K_{1/3}$, для $\chi_{lm\omega}^{\text{in}}(r_0)$ имеем [76]

$$\chi_{lm\omega}^{\text{in}}(r_0) = \left[\frac{2}{3\pi} \frac{r_0 \Omega_0^2}{\gamma^2} \frac{r_0^2 + a^2}{g} (1 + \psi^2) \right]^{1/2} K_{1/3}(z), \quad (14)$$

$$z = \frac{2}{3} q = \frac{2|m|}{3\gamma^3 g} \Omega_0^3 r_0^2 \Delta_0^{1/2} (1 + \psi^2)^{3/2}, \quad (15)$$

$$\psi^2 = \frac{2\gamma^2}{r_0^2 \Omega_0^2} \frac{l - |m|}{|m|} \sqrt{1 - a^2 \Omega_0^2}.$$

Подставив (14) в (6) для интенсивности излучения, уходящего на бесконечность, находим

$$I^{\text{out}} = \sum_{l, m > 0} \frac{4m}{3\pi\gamma^2} \frac{\Omega_0^3 r_0}{g} \left(\frac{q_c}{u^0} \right)^2 \left| S_{lm}^{\text{aw}} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right|^2 (1 + \psi^2) K_{1/3}^2(z). \quad (16)$$

Поскольку функция Макдональда при больших значениях аргумента экспоненциально спадает, то, как видно из (15), основной вклад в излучение дают высокие гармоники вплоть до

$$m \leq m_{\text{max}} = \frac{g}{2r_0^2 \Delta_0^{1/2} \Omega_0^3} \gamma^3. \quad (17)$$

Мы видим, что, как и в случае плоского пространства-времени, спектр простирается до гармоник $\sim \gamma^3$ частоты основного тона,

при этом имеется дополнительная зависимость величины m_{\max} от величин, характеризующих гравитационное поле. Покажем, что если радиус орбиты частицы r_0 приближается к радиусу круговой фотонной орбиты r_T , то зависимость частоты обрезания в спектре излучения от релятивистского фактора γ становится квадратичной. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим поведение величины g (12) при $r_0 \rightarrow r_T$. С помощью формул (3.63), (3.65) § 3 можно показать, что для заданного ε при $r_0 \rightarrow r_T$ произведение

$$\gamma g \rightarrow \varepsilon (Mr_0)^{-1/2} \frac{3(r\gamma - M)^2}{(r\gamma + 3M)^3} (2r_\gamma^2 - 3Mr_\gamma + a^2), \quad (18)$$

т. е. остается конечным при $\gamma \rightarrow \infty$, следовательно, в этом пределе $m_{cr} \propto \gamma^2$. Таким образом, удается проследить переход от режима СИ ($m_{\max} \propto \gamma^3$) к режиму ГСИ ($m_{\max} \propto \gamma^2$), обсуждавшемуся в § 11. Интересно также сравнить распределение мощностей СИ и ГСИ определенной частоты $\omega = m\omega_0$ по орбитальному моменту l . Поскольку эффективная область изменения величины ψ простирается от нуля до единицы, то $l - |m| \leq |m|/\gamma^2$ при $|m| \leq \gamma^3$ в режиме СИ и $|m| \leq \gamma^2$ в режиме ГСИ. Таким образом вклад в СИ при фиксированном m дает большое число мультиполей в пределах $\Delta l \sim \gamma$, в то время как основной вклад в ГСИ, как следует из результатов § 11, дают мультиполи $l = |m|$ и $l = |m| + 1$.

С помощью соотношения (Д.28) Дополнения можно показать, что при больших l , $|m|$

$$\left| S_{lm}^{a\omega} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right|^2 \simeq \frac{(-1)^{l-|m|} + 1}{\pi} \frac{\gamma}{\psi} \frac{1}{r_0 \Omega_0} \sqrt{1 - a^2 \Omega_0^2}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (16) и переходя ввиду квазинепрерывности спектра от суммирования по l и m к интегрированию по ψ и параметру

$$y = \frac{4|m|}{3\gamma^3} \frac{r_0^2 \Omega_0^3 \sqrt{\Delta_0}}{g}, \quad (20)$$

находим

$$\frac{dI}{dy d\psi} = \frac{9}{16\pi^2} \left(\frac{q_c \gamma^2}{r_0} \right)^2 \frac{g^2}{r_0^2 \Omega_0^3 \sqrt{\Delta_0}} y^2 (1 + \psi^2) K_{1/3}^2(z). \quad (21)$$

В результате интегрирования по ψ получаем спектральное распределение излучения

$$\frac{dI}{dy} = \frac{3\sqrt{3}}{16\pi} \left(\frac{q_c \gamma^2}{r_0} \right)^2 \frac{g^2}{r_0^2 \Omega_0^3 \sqrt{\Delta_0}} y \int_y^\infty K_{1/3}(x) dx. \quad (22)$$

Из этой формулы следует, что при малых y интенсивность излучения растет линейно, при больших y — экспоненциально спадает.

Спектральная кривая имеет максимум в области гармоник порядка m_{\max} (17).

Проинтегрировав (22) по y , находим полную мощность излучения скалярных волн ультрарелятивистской частицей в режиме СИ для метрики Керра:

$$I = \frac{1}{12} \left(\frac{q_c \gamma^2}{r_0} \right)^2 \frac{g^2}{\Omega_0^3 \Delta_0^{1/2}}. \quad (23)$$

Эта величина по порядку превосходит интенсивность скалярного ГСИ (11.48) в γ^2 раз. При $a=0$ формулы (21), (22) и (23) переходят в результаты, полученные в работе [64] для метрики Шварцшильда.

Излучение электромагнитных волн

Как и при расчете электромагнитного ГСИ (§ 11), удобно воспользоваться методом сведения к радиальному уравнению с вещественным потенциалом. Эффективный потенциал в уравнении для $_{-1}X$ (11.16) при $l \gg 1$, $|m| \gg 1$ имеет простой вид

$$_{-1}U \approx \frac{\Delta}{(r^2 + a^2)^2} \left(\lambda - \frac{\mathcal{K}^2}{\Delta} \right), \quad (24)$$

что совпадает с потенциалом (11.14) в скалярном уравнении в том же приближении. Поэтому для радиальной функции $_{-1}X^{\text{in}}$ в точке r_0 , соответствующей радиусу круговой орбиты, по-прежнему будем иметь выражение (14), а производная от этой функции по координате r^* с той же точностью будет равна

$$\left. \frac{d}{dr^*} (_{-1}X) \right|_{r=r_0} = \frac{\omega r_0}{\gamma} \left[\frac{2}{3\pi} \frac{r_0 \Omega_0^2 \Delta_0}{\gamma^2 (r_0^2 + a^2) g} \right]^{1/2} (1 + \psi^2) K_{2/3}(z). \quad (25)$$

Дальнейшие вычисления аналогичны проведенным в § 11. Для двух независимых состояний поляризации электромагнитного излучения, уходящего на бесконечность (поглощение дырой экспоненциально мало), получаем

$$I_\varphi = \sum_{l, m > 0} \frac{4}{3\pi} \frac{e^2}{\gamma^4 g} |m| \Omega_0^5 \Delta_0 r_0 \left| S_{lm}^{a\omega} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right|^2 (1 + \psi^2)^2 K_{2/3}^2(z),$$

$$I_\theta = \sum_{l, m > 0} \frac{4}{3\pi} \frac{e^2}{\gamma^2 g} \frac{\Omega_0^3 \Delta_0}{|m| r_0} \left| \frac{d}{d\theta} (S_{lm}^{a\omega}(\theta)) \right|_{\theta=\pi/2}^2 (1 + \psi^2) K_{1/3}^2(z). \quad (26)$$

Далее можно перейти от суммирования по l и m к интегрированию по ψ и y , воспользовавшись для угловых функций приближением (19), а также соответствующим приближением для производной

$$\left| \frac{dS_{lm}^{a\omega}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\pi/2}^2 = \frac{1 - (-1)^{l-|m|}}{\pi} \frac{\psi}{\gamma} r_0 \Omega_0 m^2 \sqrt{1 - a^2 \Omega_0^2}. \quad (27)$$

В результате имеем

$$\begin{aligned}\frac{dI_{\varphi}}{dy d\psi} &= \frac{27}{18\pi^3} I \cdot y^2 (1 + \psi^2)^2 K_{2/3}^2(z), \\ \frac{dI_{\theta}}{dy d\psi} &= \frac{27}{8\pi^2} I y^2 \psi^2 (1 + \psi^2) K_{1/3}^2(z),\end{aligned}\quad (28)$$

где через I обозначена полная мощность СИ, просуммированного по поляризациям:

$$I = \frac{1}{6} e^2 \gamma^4 g^2 \Omega_0^{-3} r_0^{-4} \Delta_0^{-1/2}. \quad (29)$$

Спектральное распределение излучения найдем, проинтегрировав (28) по параметру ψ ,

$$\frac{dI_{\varphi, \theta}}{dy} = \frac{9\sqrt{3}}{16\pi} I y \left[\int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx \pm K_{2/3}(y) \right]. \quad (30)$$

Заметим, что выражения (28), (30), характеризующие СИ ультрарелятивистской частицы в пространстве-времени Керра, отличаются от соответствующих величин в пространстве Минковского (§ 13) лишь явным видом параметров y и ψ . Это не случайно и связано с локальным характером процесса испускания высокочастотных волн ультрарелятивистской частицей, движущейся (преимущественно) под действием негравитационных сил. Ниже будет показано, каким образом можно получить формулы (28), (30) исходя из результатов теории в пространстве Минковского, ассоциируя последнее с локально-геодезической системой отсчета.

Качественно особенности электромагнитного СИ заряженных частиц повторяют особенности скалярного излучения, обсуждавшиеся выше, отличие имеется в области малых y , где функция (30) растет как $y^{1/3}$. Полная интенсивности электромагнитного СИ (29) растет с увеличением энергии частицы как γ^4 . Можно проследить предельный переход к режиму ГСИ, для которого $I \sim \gamma^2$. Ограничимся для простоты случаем метрики Шварцшильда. При $a=0$ из (29) получим [214]

$$I = \frac{2}{3} e^2 \gamma^4 \left(\frac{r_0 - 3M}{r_0 - 2M} \right)^2 \frac{1}{r_0^2}. \quad (31)$$

Радиус круговой светогеодезической в поле Шварцшильда $r_1 = 3M$, при этом величина $\gamma(r_0 - 3M)$ при $r_0 \rightarrow 3M$, как следует из (3.45), остается конечной, и мы получаем $I(r_0 \rightarrow 3M) \sim \gamma^2$.

Формулы (28) внешне напоминают формулы, описывающие спектрально-угловое распределение мощности синхротронного излучения [20], однако на самом деле величина ψ характеризует распределение по l , а не по углам. Чтобы получить угловое рас-

пределение, необходимо (ограничимся случаем метрики Шварцшильда) вычислить сумму в выражении для скаляра Ньюмена — Пенроуза

$$\Phi_{2m} = \sum_{l=|m|}^{\infty} R_{lm}(r) {}_{-1}Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (32)$$

Учитывая, что в рассматриваемом ультрарелятивистском случае основной вклад дают $|m| \gg 1$, можно перейти в (12) от суммирования к интегрированию. Используя для произведения $Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta_0, \varphi_0)$ асимптотическое выражение, справедливое при больших l и $|m|$, для углового распределения полной интенсивности излучения получим выражение [215]

$$\frac{dI}{d\Omega} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^2 m^2 \Delta_0^3 \varepsilon}{6\pi^3 r_0^8 \omega_0 (r_0 - 3M)} [\cos^2 \theta K_{1/3}^2(\xi) + \varepsilon K_{2/3}^2(\xi)],$$

$$\xi = \frac{m}{3} \frac{(r_0 - 2M)^2}{r_0 (r_0 - 3M)} \varepsilon^{3/2}; \quad \varepsilon = \gamma^{-2} + \frac{r_0^2}{\Delta_0} \cos^2 \theta. \quad (33)$$

Излучение в плоскости орбиты содержит только θ -компоненту и является линейно поляризованным. При отклонении от плоскости орбиты поляризация становится эллиптической. При $M \rightarrow 0$ получаем известную формулу для спектрально-углового распределения синхротронного излучения в пространстве Минковского [20]. Сравнение формул (33) и (28) показывает, что угол θ в спектрально-угловом распределении связан простым соотношением с квантовыми числами мультиполя $\theta^2 \sim 2(l - |m|)/|m|$. Электромагнитная волна, распространяющаяся в однородном внешнем электромагнитном поле, порождает гравитационную волну той же частоты с нарастающей в зависимости от расстояния амплитудой, вследствие резонансной взаимной трансформации волн [222, 223]. Аналогичный эффект имеет место для волн высокой частоты и в слабо неоднородном [224] поле. Таким образом, в рассматриваемой ситуации помимо электромагнитных генерируются также гравитационные волны, спектр которых близок к спектру электромагнитного излучения, а интенсивность имеет порядок

$$dP_{\text{grav}} \sim (B/B_M)^2 (r_B/M)^2 dP_{\text{em}}, \quad (34)$$

где $B_M = 1/M$ — характерный «гравитационный» масштаб напряженности магнитного поля (2.1), r_B — расстояние, на котором магнитное поле можно считать однородным (подробнее см. в [225]).

Зависимость спектра от спина поля излучения

Обсудим общие особенности спектрального распределения СИ излучения различной природы. Сравнивая (30) с (22), получим

следующую формулу, качественно описывающую спектральное распределение излучения ультрарелятивистских частиц:

$$\frac{dIs}{d\omega} \propto C_s \left(\frac{\omega}{\omega_{\max}} \right)^{1-2s/3} e^{-2\omega/\omega_{\max}}, \quad (35)$$

где $\omega_{\max} = \omega_0 m_{\max}$, C_s — некоторый фактор. Это соотношение справедливо для скалярного ($s=0$), электромагнитного ($s=1$) и собственного гравитационного [91, 226] излучения ($s=2$) (формула (34) описывает вторичный эффект трансформации электромагнитного излучения в гравитационное в магнитном поле). Сравнивая (31) с соответствующей формулой для геодезического синхротронного излучения (11.87), нетрудно заметить, что на каждую «единицу спина» в случае ГСИ приходится фактор ω/ω_{cr} , а в случае СИ — фактор $(\omega/\omega_{\max})^{2/3}$. Физическое истолкование этой закономерности следующее. Скалярное излучение «продольно», электромагнитное — поперечно, а гравитационное — дважды поперечно. Поскольку во всех случаях излучение ультрарелятивистской частицы сосредоточено в узкой области углов около направления скорости ($\theta \ll \gamma^{-1}$), то амплитуда электромагнитного излучения будет содержать фактор $(\mathbf{e}\mathbf{v})$, где \mathbf{e} — вектор поляризации, имеющий порядок $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}) \ll \theta$, по отношению к амплитуде скалярного излучения; амплитуда гравитационного излучения — фактор $(\mathbf{e}\mathbf{v})^2 \ll \theta^2$. Интенсивности скалярного электромагнитного и гравитационного излучения будут относиться друг к другу как $1:\theta^2:\theta^4$ (заметим, что эффективный «заряд» в случае скалярных волн равен (q_c/γ) , если источником считать след тензора энергии импульса $T \sim T_{00}/\gamma^2 \sim \mu/\gamma$; для электромагнитных волн — e , для гравитационных — $\mu\gamma (\sim T_{00})$). В режиме ГСИ спектр простирается до гармоник $|m| \sim \gamma^2$, $l \sim |m|$ и характерный угол $\theta \sim [(l - |m|)/|m|]^{1/2} \sim |m|^{-1/2} \sim (\omega_{cr}/\omega)^{1/2}$. В результате получим $1:\theta^2:\theta^4 = 1:(\omega_{cr}/\omega):(\omega_{cr}/\omega)^2$ в соответствии с (11.87). В режиме СИ $|m| \sim \gamma^3$, $l - |m| \sim \gamma$, т. е. $\theta \sim [(l - |m|)/|m|]^{1/2} \sim |m|^{-1/3} \sim (\omega_{cr}/\omega)^{1/3}$. Поэтому $1:\theta^2:\theta^4 = 1:(\omega_{cr}/\omega)^{2/3}:(\omega_{cr}/\omega)^{4/3}$, как и следует из (35).

СИ в медленно изменяющемся гравитационном поле

Возможность аналитического решения задачи о синхротронном излучении релятивистской заряженной частицы, движущейся по круговой орбите вокруг черной дыры, демонстрирует эффективность методов решения волновых уравнений в пространстве-времени Керра, однако уже то, что найденные выражения (28), (30) имеют такой же функциональный вид, что и результаты теории СИ в пространстве Минковского (см. также аналогичные вычисления в метрике Керра-Ньюмена [174, 227]), наводит на мысль, что они могут быть получены более просто. Покажем, что формулы (28), (30) можно вывести путем преобразования величин, рассчитанных в локально-геодезической системе отсчета, в

которой пространство-время является плоским [217]. Такая процедура применима и в более общем случае ультрарелятивистской заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле $F_{\mu\nu}$ в искривленном пространстве-времени с медленно изменяющимися параметрами. Именно необходимо, чтобы длина формирования основной части спектра СИ $\Delta l_{\text{СИ}} \sim r_0/\gamma$ была мала по сравнению с масштабом L изменения гравитационного и электромагнитного полей. При этом характерная длина волны в спектре излучения имеет порядок $\lambda \sim \Delta l/\gamma^2 \sim r_0/\gamma^3$, причем волновая зона начинается на расстояниях, малых по сравнению с r_0 . Можно поэтому рассматривать излучение в локально-геодезической системе отсчета, начало которой находится в некоторой средней точке дуги формирования $\Delta l_{\text{СИ}}$ как излучение в пространстве Минковского. Переход от локально-геодезической системы координат $\{\hat{\xi}^\mu\}$ к общей системе координат осуществляется с помощью соотношения

$$\hat{\xi}^\mu = \Lambda^\mu_\nu \left[(x^\nu - x_0^\nu) + \frac{1}{2} \Gamma^\nu_{\alpha\beta} (x^\alpha - x_0^\alpha) (x^\beta - x_0^\beta) \right], \quad (36)$$

где $\Lambda^\mu_\nu = \partial \hat{\xi}^\mu / \partial x^\nu$ в точке $x^\alpha = x_0^\alpha$. В терминах координат $\hat{\xi}^\mu$ квадрат интервала равен $ds^2 = (d\hat{\xi}^0)^2 - (d\hat{\xi}^i)^2$. Будем считать, что начало системы координат $\hat{\xi}^\mu$ выбрано в точке x_0^α мгновенного положения частицы. При сделанных предположениях волновая зона в системе $\{\hat{\xi}^\mu\}$ начинается на расстояниях, много меньших масштаба неоднородности L гравитационного поля, поэтому для вычисления мощности СИ ультрарелятивистской частицы можно воспользоваться формулой электродинамики в пространстве Минковского

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d^3k} = & -\frac{e^2}{(2\pi)^2} (\hat{\xi}^0)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \hat{\xi}^{\hat{\nu}} \left(s + \frac{\tau}{2} \right) \times \\ & \times \hat{\xi}^{\hat{\nu}} \left(s - \frac{\tau}{2} \right) e^{ik\hat{\mu} \left(\hat{\xi}^{\hat{\mu}} \left(s + \frac{\tau}{2} \right) - \hat{\xi}^{\hat{\mu}} \left(s - \frac{\tau}{2} \right) \right)}, \end{aligned} \quad (37)$$

где $k^{\hat{\mu}} = (\hat{\omega}, \hat{k})$ — волновой вектор фотона в локальной системе, $\hat{\xi}^{\hat{\mu}} \equiv d\hat{\xi}^\mu/ds$, величина I вычисляется в момент собственного времени s и пределы интегрирования по τ растянуты до бесконечных пределов ввиду быстрой сходимости интеграла. Учитывая, что СИ формируется на малом участке траектории, представим $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}(s \pm \tau/2)$ в виде разложения

$$\hat{\xi}^{\hat{\mu}} \left(s \pm \frac{\tau}{2} \right) = \hat{\xi}^{\hat{\mu}}(s) \pm \frac{\tau}{2} \dot{\hat{\xi}}^{\hat{\mu}} + \frac{\tau^2}{8} \ddot{\hat{\xi}}^{\hat{\mu}} \pm \frac{\tau^3}{48} \dddot{\hat{\xi}}^{\hat{\mu}}, \quad (38)$$

после чего интеграл в (37) выражается через функцию Макдональда:

$$d\hat{I} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e^2}{\pi^2} (\hat{\xi}^{\hat{0}})^{-1} \left(1 + 4\hat{\xi}^2 \frac{(k\hat{\xi})}{(k\ddot{\xi})} \right) \sqrt{\frac{(k\hat{\xi})}{(k\ddot{\xi})}} K_{1/3}(\zeta) d^3k, \quad (39)$$

где $\hat{\xi}^2 \equiv \hat{\xi}^{\hat{\mu}} \hat{\xi}_{\hat{\mu}}$; $(k\hat{\xi}) = k^{\hat{\mu}} \hat{\xi}_{\hat{\mu}}$ и т. д., и $\zeta = \frac{4\sqrt{2}}{3} (k\hat{\xi})^{3/2} (k\ddot{\xi})^{-1/2}$.

В случае, если $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} < 0$, $F^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} = 0$, существует локально-геодезическая система отсчета, в которой поле является чисто магнитным. В этом случае можно показать, что для ультрарелятивистской частицы с точностью до членов порядка $\hat{\gamma}^{-2}$ ($\hat{\gamma} = \hat{\xi}^{\hat{0}}$) выполняется соотношение $(k\hat{\xi}) \simeq -\hat{\omega} \hat{\xi}^2 / \hat{\gamma}$. Вводя инвариантную переменную

$$y = 2/3 (k\ddot{\xi}) (-\hat{\xi}^2)^{-3/2} \quad (40)$$

и выполнив интегрирование по углам вектора k , найдем спектральное распределение СИ

$$\frac{d\hat{I}}{dy} = \hat{I} \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \int_y^\infty K_{5/3}(x) dx; \quad \hat{I} = -\frac{2}{3} e^2 \hat{\xi}^2, \quad (41)$$

где \hat{I} — полная интенсивность излучения в локальной системе.

Чтобы теперь получить формулы, описывающие СИ в асимптотически плоском пространстве-времени в терминах величин, отнесенных к глобальной системе координат, достаточно преобразовать волновой вектор k в (39), (41) к общей координатной системе по формуле $k_{\hat{\mu}} = k_{\hat{\nu}} \Lambda_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}}$ и выразить $\hat{\xi}^2$, ζ и y через параметры, определенные в глобальной системе; к этой системе следует также преобразовать саму величину \hat{I} . Чтобы, например, получить спектральное распределение СИ ультрарелятивистской частицы, движущейся по круговой орбите в магнитном поле в пространстве-времени Керра (4.30), выберем ориентацию осей системы координат $\{\hat{\xi}^{\hat{\mu}}\}$ вдоль координатных линий локально-статической системы отсчета

$$\Lambda_{\hat{\mu}}^{\hat{0}} dx^{\hat{\mu}} = \left(1 - \frac{2Mr_0}{\Sigma_0} \right)^{1/2} dt + \frac{2Mar_0 \sin^2 \theta_0}{[\Sigma_0 (\Sigma_0 - 2Mr_0)]^{1/2}} d\varphi; \quad \Lambda_{\hat{\mu}}^{\hat{1}} dx^{\hat{\mu}} = \sqrt{\frac{\Sigma_0}{\Delta}} dr;$$

$$\Lambda_{\hat{\mu}}^{\hat{2}} dx^{\hat{\mu}} = \sqrt{\Sigma_0} d\theta; \quad \Lambda_{\hat{\mu}}^{\hat{3}} dx^{\hat{\mu}} = \sqrt{\Delta_0} \left(\frac{\Sigma_0}{\Sigma_0 - 2Mr_0} \right)^{1/2} \sin \theta_0 d\varphi. \quad (42)$$

Далее нетрудно показать, что $\hat{\omega}/\hat{\gamma} = \omega/\gamma$, а ускорение частицы, движущейся по окружности, в локально-геодезической системе равно

$$(-\xi^2)^{1/2} = \frac{\gamma^2}{2r_0^2 \Delta_0^{1/2} \Omega_0^2} [\Omega_0^2 (3r_0^2 + a^2) - 1], \quad (43)$$

где Ω_0 определяется формулой (3.65). Подставляя (43) в (40), получаем (с учетом того, что $\omega = m\omega_0$) с точностью до членов γ^{-1} выражение (20). Переходя к интенсивности излучения, отнесенной к координатному времени Бойера—Линдквиста $I = I(g_{00} + \omega_0 g_{03})$, для величины I получаем из (41) найденную выше формулу (29) [216].

Приведенные выше рассуждения справедливы и для уравнения Дирака, записанного в локально-геодезической системе отсчета. Можно поэтому утверждать, что и квантовые поправки к спектру СИ в этой системе будут определяться выражением (13.44), справедливым в пространстве Минковского. Произведя соответствующие преобразования переменных, для мощности СИ ультрарелятивистской частицы в поле Шварцшильда с учетом квантовых поправок из (13.45) найдем (в системе $\hbar = c = G = 1$) [216, 217]

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2 \gamma^4}{r_0^2} \left(\frac{r_0 - 3M}{r_0 - 2M} \right)^2 \left[1 - \frac{55\sqrt{3}}{16} \frac{\gamma^2}{\mu} \frac{r_0(r_0 - 3M)}{\Delta_0^{3/2}} + \right. \\ \left. + 48 \frac{\gamma^4}{\mu^2} \frac{r_0^2(r_0 - 3M)^2}{\Delta_0^3} + \dots \right], \quad (44)$$

где μ — масса частицы. Соответствующая формула для метрики Керра имеет вид

$$I = \frac{e^2 \gamma^4}{6} \frac{g^2}{\Omega_0^3 r_0^4 \sqrt{\Delta_0}} \left(1 - \frac{55\sqrt{3}}{16} \frac{\gamma^2}{\mu} \frac{g}{2r_0^2 \Omega_0^2 \sqrt{\Delta_0}} + \right. \\ \left. + 48 \frac{\gamma^4}{\mu^2} \frac{g^2}{4r_0^4 \Omega_0^4 \Delta_0} + \dots \right). \quad (45)$$

В этих формулах r_0 является функцией γ , поэтому зависимость квантовых поправок от энергии иная, чем в случае плоского пространства-времени.

§ 15. МАЗЕР-ЭФФЕКТ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Известно, что электроны, движущиеся в магнитном поле, образуют среду, характеризующуюся существованием отрицательного поглощения электромагнитных волн определенных частот. Эффект имеет важное значение как в практических приложениях [210], так и в астрофизике [228]. Возможность мазерного эффекта на циклотронной частоте была показана в 1959 г. независимо А. В. Гапоновым [229] и Ю. Шнейдером [230]. На основе этой идеи был создан новый тип мощных СВЧ-генераторов, названных мазерами на циклотронном резонансе, или гиротронами. В работах [203—206] было показано, что для существенно релятивистских частиц в принципе возможно получение мазерного эффекта и на высоких гармониках циклотронной частоты. Отрицательное поглощение электронами в магнитном поле обусловлено релятивистскими добавками в законе зависимости энергии от скорости. Позже было показано, что для многопериодических систем мазерный эффект может иметь место и в нерелятивистском режиме движения [231—233, 235]. Оказалось, что такая возможность может реализоваться и для частиц, движущихся в окрестности черных дыр [234, 81]. Общие соотношения, связывающие мощность суммарного эффекта индуцированного излучения и поглощения с мощностью спонтанного излучения квазиклассических систем, были получены в [211—212] и позже переоткрыты в теории лазеров на свободных электронах.

Условия возникновения отрицательного поглощения

При взаимодействии гармонического осциллятора с полем электромагнитных волн со случайными фазами, происходит поглощение энергии волн. Пусть осциллятор частоты Ω подвергается действию внешней силы $f(t)$,

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = f(t). \quad (1)$$

Решение этого уравнения с начальными условиями $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ имеет вид

$$x(t) = \Omega^{-1} \int_0^t \sin \Omega(t-t') f(t') dt'. \quad (2)$$

Рассмотрим случай периодической внешней силы

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t - \delta), \quad (3)$$

где δ — фаза, предполагаемая случайной величиной. Вычислим работу, производимую внешней силой над осциллятором в единицу времени, усреднив мгновенную величину мощности по фазе δ

$$P = \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle_{\delta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}(t, \delta) f(t, \delta) d\delta. \quad (4)$$

Продифференцировав решение (2) по времени и подставив результат в (4), получим выражение

$$P = \int_0^t \cos \Omega(t-t') \langle \dot{f}(t') f(t) \rangle_{\delta} dt', \quad (5)$$

где введена корреляционная функция

$$\langle \dot{f}(t'), f(t) \rangle_{\delta} = \frac{f_0^2}{2} \cos \omega(t-t'). \quad (6)$$

В результате интегрирования по t' находим

$$P = \frac{f_0^2}{2} \left(\frac{\sin(\omega + \Omega)t}{\omega + \Omega} + \frac{\sin(\omega - \Omega)t}{\omega - \Omega} \right). \quad (7)$$

Как видно из этой формулы, мощность поглощения является осциллирующей величиной, среднее значение которой обращается в нуль, за исключением случая резонанса $\omega = \Omega_0$, когда P линейно нарастает со временем. В случае точного резонанса необходимо учесть диссипативные процессы, что можно сделать, интегрируя выражение (7) по времени согласно соотношению

$$\bar{P} = \nu \int_0^{\infty} P(t) e^{-\nu t} dt, \quad (8)$$

где ν — эффективная частота, характеризующая скорость диссипации энергии.

Учитывая в (7) лишь второе резонансное слагаемое, получим

$$\bar{P} = \frac{f_0^2}{2} \frac{\nu}{(\omega - \Omega)^2 + \nu^2}. \quad (9)$$

Эта величина, принимающая максимальное значение при $\omega = \Omega$, очевидно, является всегда положительной.

С квантовомеханической точки зрения положительная определенность P объясняется следующим образом. Гармонический осциллятор имеет эквидистантный спектр энергий

$$E_n = \hbar \Omega (n + 1/2), \quad (10)$$

поэтому при воздействии резонансной внешней силы возможен дипольный переход с уровня E_n на E_{n+1} (поглощение), а также переход на уровень E_{n-1} с отдачей энергии. Поскольку матричные элементы переходов $V_{n,n+1} \sim n+1$, а $V_{n,n-1} \sim n$, то разность вероятностей переходов в единицу времени, определяющая суммарную мощность поглощения

$$P = \hbar \omega (\omega_{n,n+1} - \omega_{n,n-1}), \quad (11)$$

оказывается величиной положительной.

Этот вывод может измениться, если собственная частота системы зависит от энергии, как, например, для электронов, движущихся в однородном магнитном поле

$$\Omega = \Omega_B = \frac{|e|B}{E} = \frac{|e|B\hbar}{m} \sqrt{1-v^2}. \quad (12)$$

Если частица при взаимодействии с электромагнитной волной увеличивает свою энергию, поглощая энергию волны, то Ω_B уменьшается и ларморовское вращение замедляется до тех пор, пока частица не выходит из резонанса с волной. Если же происходит, наоборот, передача энергии волне, то вращение становится более быстрым. На рис. 15 схематически изображено взаимо-

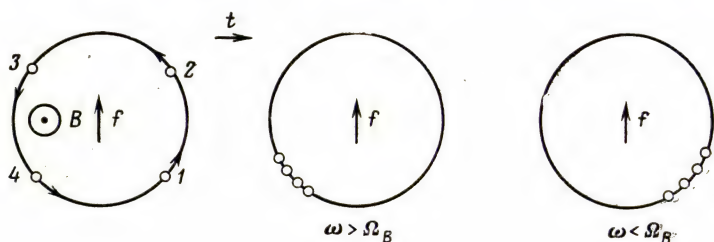


Рис. 15. Формирование сгустка при воздействии периодической силы на электроны, движущиеся по окружности в магнитном поле

действие электронов, вращающихся по окружности в однородном магнитном поле, с периодической внешней силой. Диаграммы соответствуют моментам времени, когда сила направлена вертикально вверх. Первоначально все частицы расположены на окружности равномерно, при этом частицы 1, 2 увеличивают энергию и их ларморовское вращение замедляется; наоборот, частицы 3, 4, энергия которых уменьшается, начинают вращаться быстрее. Через несколько периодов образуется сгусток, вращающийся с частотой Ω_B , соответствующей результирующему равносному значению энергии. Если $\omega < \Omega_B$, то сгусток опережает волну по фазе и в результате займет равновесное положение, отвечающее систе-

матическому поглощению энергии. Напротив при $\omega > \Omega_B$ положение сгустка будет соответствовать отрицательному поглощению.

С квантовой точки зрения зависимость частоты от энергии проявляется как слабая неэквидистантность энергетических уровней: расстояние между соседними уровнями убывает с ростом энергии. И хотя матричные элементы переходов вверх (с поглощением) больше по абсолютной величине, чем матричные элементы переходов вниз (с излучением), соответствующие вероятности могут оказаться в обратном соотношении, если частота ω не точно совпадает с Ω_B , но несколько превышает Ω_B . В самом деле, при учете уширения уровней закон сохранения энергии при вынужденных переходах выражается наличием резонансного фактора

$$\frac{\nu}{(\omega - \Omega_{n,n'})^2 + \nu^2}, \quad (13)$$

где $\Omega_{nn'} = (E_n - E_{n'})/\hbar$, ν — эффективная ширина уровней в единицах частоты. Пусть по определению

$$\Omega_B = \Omega_B(E_n) = (E_{n+1} - E_n)/\hbar, \quad (14)$$

тогда при $\omega > \Omega_B$ дипольные переходы с уровня E_n на уровень E_{n-1} могут оказаться более вероятными, нежели переходы $E_n \rightarrow E_{n+1}$, из-за различной величины резонансного множителя (13). Суммарная мощность поглощения будет равна

$$P = \hbar \omega (\omega_{n,n+1} - \omega_{n,n-1}) \simeq \hbar \omega \frac{\partial}{\partial E} \left(\omega(E) \frac{\nu}{(\omega - \Omega_B(E))^2 + \nu^2} \right), \quad (15)$$

где положено

$$\omega_{n,n+1} = \omega(E) \frac{\nu}{(\omega - \Omega_B(E))^2 + \nu^2}. \quad (16)$$

В результате дифференцирования по E с учетом зависимости частоты от энергии получим

$$P = \frac{\hbar \omega \nu}{(\omega - \Omega_B)^2 + \nu^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial E} + \frac{2(\omega - \Omega_B)}{(\omega - \Omega_B)^2 + \nu^2} \omega \frac{\partial \Omega_B}{\partial E} \right). \quad (17)$$

(Заметим, что величина ω обратно пропорциональна постоянной Планка, поэтому выражение (17) остается конечным в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$.) Поскольку производная $\partial \Omega_B / \partial E$ отрицательна, то второй член в (17) оказывается отрицательным при $\omega > \Omega_B$ (первое слагаемое, пропорциональное $\partial \omega / \partial E$, как и в случае гармонического осциллятора, положительно). Если величина расстройки $\omega - \Omega_B$ частоты мала по сравнению с ν , то, учитывая соотношение

$$\partial \Omega_B / \partial E = -\Omega_B / E, \quad (18)$$

из формулы (17) получим

$$P = \frac{\hbar\omega}{v} \left(\frac{\partial\omega}{\partial E} - \frac{2\Omega_B}{v} \frac{\omega - \Omega_B}{v} \frac{w}{E} \right). \quad (19)$$

Поскольку $\Omega_B/v \gg 1$, ясно, что при некоторой величине расстройки $\omega - \Omega_B > 0$ второе слагаемое в (19) будет доминирующим и мощность поглощения окажется отрицательной.

Другой способ получения отрицательного поглощения при взаимодействии электромагнитных волн с квазиклассической системой был предложен в работе [231] и может быть проиллюстрирован на следующем простом примере. Рассмотрим гармонический осциллятор, центр тяжести которого движется по окружности в плоскости $z=0$ и колебания совершаются вдоль оси z . Считая, что осциллирующая частица обладает электрическим зарядом e , рассмотрим вынужденные колебания осциллятора в поле электромагнитной волны, описываемой тензором $f_{\mu\nu}$. Поскольку невозмущенное движение является чисто круговым, то в первом порядке по возмущению, вызванному волной, найдем, что вынужденные колебания описываются уравнением

$$\ddot{z} + \Omega_z^2 z = \dot{f}, \quad (20)$$

где \dot{f} — значение вертикальной компоненты силы в точке мгновенного положения частицы:

$$\dot{f} = e(\dot{f}_0 + \Omega_\varphi f_\varphi). \quad (21)$$

Рассмотрим случай, когда функция f , зависящая от азимутального угла φ в плоскости вращения времени, имеет вид бегущей волны

$$f = f_0 \cos(\omega t - \varphi + \delta) \quad (22)$$

с произвольной начальной фазой δ . Тогда можно повторить вычисления, проведенные выше для гармонического осциллятора, дополнительно учитывая зависимость силы от координат. При этом в (4) в качестве dA/dt следует подставить

$$\frac{dA}{dt} = e \left(f_{0z} \frac{dz}{dt} + z \Omega_\varphi \frac{\partial f_{0\varphi}}{\partial z} \right) \quad (23)$$

(второй член, имеющий тот же порядок малости, что и первый, возникает при учете зависимости поля $f_{\mu\nu}$ от координат). Из уравнений Максвелла имеем

$$\frac{\partial f_{0\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial f_{z0}}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_{\varphi z}}{\partial t} = 0, \quad (24)$$

причем на невозмущенной траектории частицы

$$\frac{df_{0z}}{dt} = \frac{\partial f_{0z}}{\partial t} + \Omega_{\varphi} \frac{\partial f_{0z}}{\partial \varphi}. \quad (25)$$

Опуская в (23) полную производную по времени, вклад которой исчезает при усреднении, найдем для средней мощности поглощения (4) выражение

$$P = - \left\langle z \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{\delta}. \quad (26)$$

Повторяя рассуждения, которые привели к формуле для средней мощности поглощения (15.9), получим

$$\bar{P} = \frac{f_0^2 \omega}{2\Omega_z} \left(\frac{v}{(\omega - \Omega^{(+)})^2 + v^2} - \frac{v}{(\omega - \Omega^{(-)})^2 + v^2} \right), \quad (27)$$

где введены обозначения для резонансных частот

$$\Omega^{(\pm)} = \Omega_{\varphi} \pm \Omega_z,$$

представляющих собой комбинации частоты обращения и частоты колебаний. Будем считать, что $\Omega_z < \Omega_{\varphi}$, тогда $\Omega^{(\pm)} > 0$. Мы видим, что в отличие от случая неподвижного осциллятора в рассматриваемом случае усредненная мощность поглощения на разностной частоте $\Omega^{(-)}$ оказывается отрицательной. Для суммарной частоты $\Omega^{(+)}$ по-прежнему имеет место поглощение. Заметим, что при $\Omega_{\varphi} \rightarrow 0$ суммарная частота $\Omega^{(+)}$ стремится к частоте колебаний осциллятора Ω_z , при этом второе слагаемое в (27) перестает быть резонансным, следовательно, мы возвращаемся к формуле для поглощения осциллятором (9).

Квантовомеханическая интерпретация этого эффекта [212] состоит в следующем. Рассматриваемая система является двухпериодической, и ее квантование, согласно правилам Бора, состоит в подчинении адиабатических инвариантов I_1, I_2

$$I_{1,2} = \oint p_{1,2} dq_{1,2} \quad (28)$$

условиям

$$I_1 = 2\pi\hbar n_1, \quad I_2 = 2\pi\hbar n_2, \quad (29)$$

где n_1, n_2 — натуральные числа. В квазиклассическом пределе уровни энергии локально эквидистантны и частоты переходов из состояния с квантовыми числами n_1, n_2 в состояние $n_1 + s_1, n_2 + s_2$ равны

$$\omega_{s_1, s_2} \equiv (E_{n_1+s_1, n_2+s_2} - E_{n_1, n_2})/\hbar = s_1 \Omega_1 + s_2 \Omega_2, \quad (30)$$

где классические частоты

$$\Omega_{1,2} = 2\pi \partial E / \partial I_{1,2}. \quad (31)$$

Поэтому в случае совпадения частоты внешней силы с одной из резонансных частот (30) могут одновременно происходить переходы с поглощением $(n_1, n_2) \rightarrow (n_1 + s_1, n_2 + s_2)$ и с излучением $(n_1, n_2) \rightarrow (n_1 - s_1, n_2 - s_2)$.

Пусть $\omega = \omega_{n_1, n_2}^{n_1 + s_1, n_2 + s_2}$ — вероятность перехода в единицу времени, тогда мощность поглощения в пределе $\hbar \rightarrow 0$ принимает вид

$$P = \hbar \omega_{s_1, s_2} (\omega_{n_1, n_2}^{n_1 + s_1, n_2 + s_2} - \omega_{n_1, n_2}^{n_1 - s_1, n_2 - s_2}) = \\ = 2\pi \hbar^2 \omega \left(s_1 \frac{\partial \omega}{\partial I_1} + s_2 \frac{\partial \omega}{\partial I_2} \right). \quad (32)$$

Для гармонического осциллятора $\partial \omega / \partial I > 0$, однако, даже в случае, если обе производные в (32) положительны, суммарная мощность поглощения может стать отрицательной, если одно из чисел (s_1, s_2) отрицательно. Действительно, пусть для определенности $s_2 < 0$. Тогда при условии положительности частоты перехода

$$\omega_{s_1, s_2} = s_1 \Omega_1 + s_2 \Omega_2 = s_1 \Omega_1 - |s_2| \Omega_2 > 0 \quad (33)$$

отрицательное поглощение будет иметь место, если производные $\partial \omega / \partial I_{1,2}$, каждая из которых предполагается положительной, удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial I_1} < \frac{|s_2|}{s_1} \frac{\partial \omega}{\partial I_2}. \quad (34)$$

В рассматриваемом выше случае $\Omega_1 = \Omega_\varphi$, $\Omega_2 = \Omega_z$, $s_1 = -s_2 = 1$, и мы имеем отрицательное поглощение на резонансной частоте $\omega_{1,-1} = \Omega_\varphi - \Omega_z$.

Более точная теория, в которой учитывается динамика населенностей для трех участвующих в индуцированных процессах уровней, развитая в работах [206, 212], приведена в книге [198]. Она применима и в случае большой интенсивности падающих волн, когда возникает явление насыщения.

Величина мощности, характеризующая суммарный эффект индуцированного излучения и поглощения электромагнитных волн квазиклассическими системами, как было показано, не исчезает в пределе $\hbar \rightarrow 0$ (вероятности $\omega_{n, n+1}$ и $\omega_{n, n-1}$ в (11) содержат постоянную Планка \hbar в знаменателе). Поэтому в случае, когда квантовые поправки малы, как это обычно имеет место в случае движения заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле, для вычисления мощности поглощения можно воспользоваться классической теорией. Этот метод [212] сводится к решению уравнений движения заряда по теории возмущений с учетом поля электромагнитной волны. Представив мировую линию заряда в виде

$$z^\mu(s) = z^{(0)\mu}(s) + z^{(1)\mu}(s), \quad (35)$$

где $z^\mu(s)$ отвечает невозмущенному движению во внешнем поле $F_{\mu\nu}(x)$; а $z^\mu(s)$ — поправка первого порядка малости по взаимодействию с полем волны $f_{\mu\nu}(x)$, получим для мощности поглощения следующее выражение:

$$P = e \langle f_{0\nu} u^\nu \rangle^{(1)} + e \langle f_{0\nu, \lambda} z^\lambda \rangle^{(1)} u^\nu + \\ + e \left(\langle z^\lambda u^\nu \rangle^{(1)(1)} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + u^\nu \langle z^\lambda z^\tau \rangle^{(0)(1)(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^\tau \partial x^\lambda} \right) F_{0\nu}(x), \quad (36)$$

где $u^\mu(s) \equiv dz^\mu/ds$.

Поглощение электромагнитного (а также гравитационного) излучения частицами, движущимися в гравитационных полях (§ 16, 17), можно рассчитать аналогичным образом.

Приведем примеры конкретных систем, в которых возникает отрицательное поглощение в соответствии с механизмами, обсуждающимися выше (в пространстве-времени Минковского).

а) Отрицательное поглощение релятивистскими электронами на гармониках циклотронной частоты [203, 206]

Мощность поглощения неполяризованного излучения электронами, движущимися по спирали в однородном магнитном поле с произвольной скоростью, имеет вид

$$dP = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{4\pi e^2}{E\gamma} \frac{s\Omega_B}{\omega} \frac{1}{1+x^2} \left(R_s + \frac{1}{1-x^2} Q_s \right) I_k d\omega d\Omega, \quad (37)$$

где $x = (\omega_s - \omega)/v$, I_k — спектральное распределение интенсивности падающего электромагнитного излучения, \mathbf{k} — волновой вектор, и

$$R_s = J'_s(z) J_s(z) \frac{s^2 - z^2}{z} - v_\perp^2 \frac{\omega_s}{s\Omega_B} J_s'^2(z) + \\ + \beta_s^2 \left[\alpha_s J_s^2(z) + \frac{z}{v_\perp^2} J'_s(z) J_s(z) \right]; \\ Q_s = \frac{\omega_s^2 - \omega^2 \cos^2 \theta}{s\Omega_B} [v_\perp^2 J_s'^2(z) + \beta_s^2 J_s^2(z)], \quad (38)$$

где

$$\beta_s = \frac{s\Omega_B}{\omega} \operatorname{ctg} \theta - v_\parallel \sin \theta; \quad \omega_s = s\Omega_B + \omega v_\parallel \cos \theta; \\ \alpha_s = \frac{v_\parallel \omega_s - \omega \sin \theta + \frac{\cos \theta}{\omega} (\omega^2 \cos^2 \theta - \omega_s^2)}{s\Omega_B \sin \theta \beta_s}; \quad (39)$$

v_\parallel — продольная компонента скорости, $J_s(z)$ — функции Бесселя аргумента $z = \omega p_\perp \sin \theta / |e| B$, p_\perp — поперечный импульс электро-

на, θ — угол между направлением волнового вектора волны и внешним магнитным полем. Подробный анализ областей отрицательного поглощения дан в [212].

б) Неоднородное магнитное поле

В [234] показано, что в неоднородном магнитном поле типа фокусирующего поля циклических ускорителей

$$A_\rho = A_z = 0, \quad A_\varphi = \frac{B}{\rho^{q-1}} \left(\frac{1}{2-q} + \frac{q}{2} \frac{z^2}{\rho^2} \right), \quad 0 < q < 1, \quad (40)$$

электроны испытывают отрицательное поглощение электромагнитных волн на частоте $\omega_q = \omega_B - \omega_r$, где $\omega_r = \omega_B \sqrt{1-q}$ — частота радиальных колебаний вокруг равновесной орбиты радиуса $r_0 = v/\omega_B$. Здесь реализуется ситуация, описываемая формулой (27). Мощность отрицательного поглощения на частоте ω_q равна

$$dP = - \frac{\pi e^2}{2E} \frac{\omega_B}{\omega_q} V \sqrt{1-q} \left(\frac{q}{1-q} \right)^2 I_k d\Omega. \quad (41)$$

в) Скрещенные поля

Аналогичный эффект имеет место для электронов, движущихся в аксиально-симметричном скрещенном поле, представляющем суперпозицию однородного магнитного поля (направление которого принимается за ось z) и электростатического поля с потенциалом

$$\varphi = \frac{|e|a(r^2 - 2z^2)}{2}, \quad 0 < a < \frac{|e|B^2}{4\mu}. \quad (42)$$

В поле такой конфигурации нерелятивистские электроны совершают радиальные колебания с частотой

$$\omega_r = \omega_B \delta; \quad \delta = (1 - 4a\mu/B^2)^{1/2}, \quad (43)$$

угловая скорость азимутального движения равна $\omega_B \cdot (1 + \delta)/2 \equiv \bar{\omega}$. Расчет показывает, что на комбинационной частоте

$$\bar{\omega} = \omega_\varphi - \omega_r = \frac{|e|B}{2\mu} [1 - (1 - 4a\mu/B^2)^{1/2}] \quad (44)$$

возникает отрицательное поглощение

$$P = - \frac{4\pi e^2}{\mu} \frac{\bar{\omega}}{\omega_r} I, \quad (45)$$

где

$$I = \int I_k \delta(\omega - \bar{\omega}) d\omega d\Omega.$$

Аналогичное выражение было получено Ю. Г. Павленко [235] в рамках квантовой теории.

§ 16. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧАСТИЦАМИ ВБЛИЗИ ЧЕРНЫХ ДЫР

Обсуждавшиеся выше механизмы отрицательного поглощения могут естественным образом реализоваться и в гравитирующих системах. Кольцо заряженных частиц, вращающихся вокруг черной дыры, может усиливать электромагнитное излучение на некоторых характерных частотах аналогично вращающемуся осциллятору. Действительно, при воздействии возмущающей силы на частицу, движущуюся по устойчивой круговой орбите в полях Шварцшильда, Шварцшильда — Эрнста или Керра, будут возникать малые колебания, частоты которых были найдены в § 3. Взаимодействие частиц, совершающих колебательное и вращательное движения с неоднородным волновым электромагнитным полем, как было показано в предыдущем разделе, имеет характер отрицательного поглощения на некоторых комбинационных частотах. Заметим, что если в метрике Шварцшильда устойчивые круговые орбиты существуют лишь для нерелятивистских частиц, то при наличии внешнего магнитного поля, как следует из результатов в § 3, имеются существенно релятивистские экваториальные круговые орбиты, которые являются устойчивыми.

Вынужденные колебания около круговых орбит

Рассмотрим возбуждение малых колебаний заряженной частицы, движущейся в экваториальной плоскости керровской черной дыры (допускается также аксиально-симметричное магнитное поле) под действием поля электромагнитных волн, принимаемого за возмущение.

В уравнения (3.69) — (3.71), описывающие свободные малые колебания $\xi^\mu(s) = x^\mu(s) - z^\mu(s)$ около устойчивых круговых орбит $z^\mu(s)$, следует ввести неоднородные члены, в результате чего получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2 \xi^A}{dt^2} + \gamma_B^A \frac{d \xi^B}{dt} = f^A, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \xi^a}{dt^2} + \gamma_B^a \frac{d \xi^B}{dt} + \xi^b \frac{\partial U^a}{\partial x^b} = f^a, \quad (2)$$

где индексы A и B принимают значения $0, \varphi$; индексы a, b — значения r, θ ; греческие индексы пробегают 4 значения, величины γ_α^μ и U^μ задаются формулами (3.41) и компоненты силы f^μ в правых частях уравнений связаны в низшем приближении теории возмущений с компонентами тензора электромагнитного поля $f_{\mu\nu}$ на невозмущенной траектории соотношением

$$f^\mu = \frac{e}{\mu} f^{\mu\nu} \dot{z}_\nu (z^0)^{-2} = \frac{e}{\mu z^0} (f_0^\mu \pm \Omega f_\varphi^\mu). \quad (3)$$

Здесь e — заряд, μ — масса, \dot{z}_0 — 4-скорость частицы на невозмущенной траектории, $\dot{z}^\mu = \dot{z}^0(1, 0, 0, \Omega)$, $\Omega = d\varphi/dt$ — угловая скорость орбитального движения; t — координата x^0 на невозмущенной траектории.

Проинтегрировав уравнения (1) однократно по t , подставим производные

$$\frac{d\xi^A}{dt} = -\gamma_r^A \xi^r + \int f^A dt \quad (4)$$

во второе слагаемое в (2). В результате из (2) получим систему разделенных уравнений, описывающих вынужденные радиальные

$$\frac{d^2 \xi^r}{dt^2} + \Omega_r^2 \xi^r = f^r + \gamma_A^r \int f^A dt \quad (5)$$

и аксиальные колебания

$$\frac{d^2 \xi^\theta}{dt^2} + \Omega_\theta^2 \xi^\theta = f^\theta, \quad (6)$$

частоты Ω_r и Ω_θ которых были вычислены в § 3 для различных конфигураций фоновых гравитационного и электромагнитного полей. Заметим, что аксиальные колебания, описываемые уравнением (6), независимы, а радиальные, как видно из (5), сопровождаются азимутальными колебаниями и осцилляциями временной координаты, которые найдем, подставляя решение уравнения (5) в (4).

Далее нам будет удобно перейти к преобразованиям Фурье компонент силы f^μ и возмущений ξ^μ . Подставим f^μ в виде ряда Фурье по переменной φ и интеграла Фурье по времени:

$$f^\mu(t, r, \theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{m=-\infty}^{\infty} f^\mu(r, \theta; \omega, m) e^{-i\omega t + im\varphi}, \quad (7)$$

а возмущения $\xi^\mu(t)$ в виде интеграла Фурье:

$$\xi^\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^\mu(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (8)$$

При подстановке (7) в уравнения (4)–(6) необходимо учесть, что на траектории невозмущенного движения $\varphi = \Omega t$, вследствие чего решения $\xi^\mu(\omega)$ выражаются рядами вида

$$\xi^\mu(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi^\mu(\omega + m\Omega, m), \quad (9)$$

где коэффициенты двойного разложения обозначены через $\xi^\mu(\omega, m)$.

Вводя обозначение

$$\omega_m = \omega - m\Omega \quad (10)$$

и подставляя разложения (7), (8) в уравнения для радиальных и аксиальных колебаний (5), (6), находим

$$\xi^r(\omega, m) = \left(f^r(\omega, m) + \frac{i}{\omega_m} \gamma_A^1 f^A(\omega, m) \right) \frac{1}{\Omega_r^2 - \omega_m^2}, \quad (11)$$

$$\xi^\theta(\omega, m) = \frac{f^\theta(\omega, m)}{\Omega_\theta^2 - \omega_m^2}, \quad (12)$$

где для краткости были опущены аргументы r, θ в обозначениях величин $f^\mu(r, \theta; \omega, m)$. Решения для азимутальных и временных возмущений получим, подставляя (11) в уравнение (4), что дает

$$\xi^A(\omega, m) = \frac{1}{i\omega_m} \gamma_r^A \xi^r(\omega, m) - \frac{f^A(\omega, m)}{\omega_m^2}. \quad (13)$$

Как и следовало ожидать, вынужденные колебания имеют резонансный характер при совпадении частоты вынуждающей силы ω с одной из гармоник частоты обращения

$$\omega_m = 0, \quad \omega = m\Omega, \quad (14)$$

а также с одной из комбинационных частот — радиальной

$$\omega_m^2 = \Omega_r^2; \quad \omega = \Omega_r^{(\pm)} = (m\Omega \pm \Omega_r) \quad (15)$$

и аксиальной

$$\omega_m^2 = \Omega_\theta^2; \quad \omega = \Omega_\theta^{(\pm)} = (m\Omega \pm \Omega_\theta). \quad (16)$$

В случае (14) возбуждаются азимутальные и временные колебания, причем, как видно из (11), они сопровождаются также и радиальными колебаниями. Собственные радиальные колебания возбуждаются при выполнении одного из резонансных условий (15), при этом возникают также азимутальные и временные осцилляции. Наконец, аксиальные колебания, являющиеся в линейном приближении независимыми, возбуждаются при выполнении одного из условий (16).

Выражения (11) — (13) формально расходятся при выполнении одного из резонансных условий (14) — (16), для придания им физического смысла необходимо учесть диссипацию. Это можно сделать, сдвигая полюс в комплексную плоскость частоты, т. е. заменяя ω на $\omega - i\nu$, в предположении, что частота ν , характеризующая скорость диссипации, мала по сравнению с ω . В этом случае возмущения, определяемые формулой (8), становятся экспоненциально затухающими со временем. Всюду далее мы будем

считать частоту ω в формулах (11)—(13) комплексной в указанном выше смысле.

При выполнении одного из резонансных условий имеет место эффективный обмен энергией между частицами и полем электромагнитных волн. Практический интерес представляет случай, когда фаза электромагнитных волн является случайной величиной и средние значения по фазам

$$\langle f_{\mu\nu} \rangle = 0; \quad \langle f^\mu \rangle = 0. \quad (17)$$

Для характеристики поля случайных сил удобно ввести корреляционную функцию

$$\langle f^{\mu}(\omega', m'), f^{\nu}(\omega, m) \rangle = \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') I^{\mu\nu}(\omega, m), \quad (18)$$

удовлетворяющую (в силу вещественности $f_{\mu\nu}$) соотношениям

$$I^{\mu\nu}(\omega, m) = I^{\star\nu\mu}(\omega, m) = I^{\nu\mu}(-\omega, -m). \quad (19)$$

Напомним, что величины $f^\mu(\omega, m)$, входящие в (18), являются также функциями переменных r и θ , то же самое, очевидно, относится и к корреляционному тензору $I^{\mu\nu}(\omega, m)$.

Мощность поглощения

Получим выражение для мощности поглощения волн частицами во втором порядке по случайному полю $f_{\mu\nu}$.

В искривленном пространстве времени, обладающем времениподобным вектором Киллинга $\xi_{(t)}$, можно определить полную работу, производимую полем $f_{\mu\nu}(x)$ под током $j^\nu(x)$, следующим образом:

$$A = \int f_{\mu\nu}(x) j^\nu(x) \xi_{(t)}^\mu \sqrt{-g} d^4x, \quad (20)$$

где интеграл вычисляется по соответствующему четырехмерному объему, $j^\nu(x)$ — плотность тока (с учетом возмущений). В отсутствие корреляций между частицами (что будет далее предполагаться) мощность поглощения волн системой частиц можно получить интегрированием соответствующей величины для одной частицы по распределению частиц, поэтому достаточно вычислить величину (20) для отдельной частицы. В этом случае плотность тока имеет вид

$$j^\nu(x) = e \int u^\nu(s) \delta^4(x^\alpha - x^\alpha(s)) \frac{ds}{\sqrt{-g}}, \quad (21)$$

где $x^\alpha(s)$ — мировая линия частицы с учетом возмущений. Подставляя (21) в (20), получим полную работу A в виде

$$A = e \int f_{\mu\nu}(x(s)) u^\nu(s) \xi_{(t)}^\mu ds, \quad (22)$$

где величины под знаком интеграла по собственному времени бе-

двигаются на возмущенной траектории частицы $x^\alpha(s) = z^\alpha(s) + \xi^\alpha(s)$. Разлагая подынтегральное выражение по ξ^α , в линейном приближении находим

$$A = e \int \left(f_{\mu\nu}(z(s)) \dot{\xi}^\nu(s) + \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \bigg|_{z(s)} \xi^\lambda(s) \dot{z}^\nu(s) \right) \xi_\mu(s) ds. \quad (23)$$

Воспользовавшись вытекающими из уравнений Максвелла соотношениями

$$\begin{aligned} \Omega \frac{\partial f_{0\Phi}}{\partial r} &= \frac{\partial f_{0r}}{\partial x^0} + \Omega \frac{\partial f_{0r}}{\partial \Phi} + \frac{\partial f_{r0}}{\partial x^0} + \Omega \frac{\partial f_{r\Phi}}{\partial x^0}, \\ \Omega \frac{\partial f_{\theta\Phi}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f_{0\theta}}{\partial x^0} + \Omega \frac{\partial f_{0\theta}}{\partial \Phi} + \frac{\partial f_{\theta 0}}{\partial x^0} + \Omega \frac{\partial f_{\theta\Phi}}{\partial x^0}, \end{aligned} \quad (24)$$

а также учитывая явный вид $\dot{z}^\nu(s)$, преобразуем выражение (23) к форме

$$\begin{aligned} A = e \int \frac{dz^0}{ds} \left[(\Omega \xi^0 - \xi^\Phi) \frac{\partial f_{0\Phi}}{\partial x^0} + \xi^r \frac{\partial}{\partial x^0} (f_{r0} + \Omega f_{r\Phi}) + \right. \\ \left. + \xi^\theta \frac{\partial}{\partial x^0} (f_{\theta 0} + \Omega f_{\theta\Phi}) \right] ds. \end{aligned} \quad (25)$$

Определим мощность поглощения P как работу в единицу времени z^0 на невозмущенной траектории частицы. Тогда для величины P , усредненной по фазам, из (25) находим

$$P = \left\langle \frac{dA}{dz^0} \right\rangle = e \left\langle \xi^\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x^0} \right\rangle, \quad (26)$$

где f_μ — ковариантная компонента силы (3), производная от которой должна быть взята на невозмущенной траектории. Выражение (26) определяет мощность поглощения зарядом электромагнитных волн со случайной фазой в нижнем неисчезающем приближении теории возмущений.

Подставляя в (26) разложения Фурье (7), (8), с учетом (9) и явного вида решений (11) — (13) получим для усредненной мощности поглощения следующее выражение:

$$\begin{aligned} P = \frac{e^2}{\mu z^0} \int_0^\infty \sum_{m=-\infty}^\infty \left[\frac{\omega}{\Omega_\theta} |g_{\theta\theta}| I^{\theta\theta}(\omega, m) \left(\frac{\xi v}{(\omega - \Omega_\theta^{(+)})^2 + v^2} - \frac{v}{(\omega - \Omega_\theta^{(-)})^2 + v^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{\Omega_r} |g_{rr}| \left(I^{(+)}(\omega, m) \frac{v}{(\omega - \Omega_r^{(+)})^2 + v^2} - I^{(-)}(\omega, m) \frac{v}{(\omega - \Omega_r^{(-)})^2 + v^2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{2g_{rr}\gamma_A^r}{\Omega_r^2} \operatorname{Im}(I^{rA}(\omega, m)) \frac{v}{(\omega - m\Omega)^2 + v^2} - 4 \left(g_{AB} - \frac{\gamma_A^r \gamma_B^r}{\Omega_r^2} g_{11} \right) I^{AB}(\omega, m) \times \\ \times \frac{v(\omega - m\Omega)}{[(\omega - m\Omega)^2 + v^2]^2}, \quad (27)$$

где введены следующие комбинации компонент корреляционного тензора (18):

$$I^{(\pm)}(\omega, m) = I^{rr}(\omega, m) + \frac{\kappa^2}{\Omega_r^2} I^{\varphi\varphi}(\omega, m) \pm \frac{2\kappa}{\Omega_r} \operatorname{Im} I^{r\varphi}(\omega, m) \quad (28)$$

и обозначено

$$\kappa = \gamma_r^{\varphi} - \Omega_r \gamma_r^0. \quad (29)$$

В этих формулах (как и ранее) опущена зависимость корреляционных функций от r и θ ; наряду с другими функциями координат в (27), (28) они должны быть взяты в точке $\theta = \pi/2$, $r = r_0$ (r_0 — радиус равновесной орбиты).

Важной особенностью выражения (27) является знакоопределенный характер резонансных членов, соответствующих частицам (15) и (16). Действительно, функция $I^{\theta\theta}(\omega, m)$, характеризующая мощность поглощения на аксиальных резонансных частотах (16), является положительно-определенной, как видно из ее определения (18) (усредненный квадрат модуля $f^{\theta}(\omega, m)$). Положительную определенность функций $I^{(\pm)}(\omega, m)$ можно доказать с помощью соотношения

$$I^{rr}(\omega, m) + \frac{\kappa^2}{\Omega_r^2} I^{\varphi\varphi}(\omega, m) \pm \frac{2\kappa}{\Omega_r} \operatorname{Im} I^{r\varphi}(\omega, m) = \\ = \int d\omega' \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \left\langle \left(f^{r\mu}(\omega, m) \pm \frac{i\kappa}{\Omega_r} f^{\varphi\mu}(\omega, m) \right)^* \left(f^{r\nu}(\omega', m') \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \frac{i\kappa}{\Omega_r} f^{\varphi\nu}(\omega', m') \right) \right\rangle \frac{\dot{z}_{\mu} \dot{z}_{\nu}}{(\dot{z}^0)^2}. \quad (30)$$

В результате усреднения по фазам $\omega' = \omega$, $m' = m$, и выражение в правой части (30) оказывается равным квадрату модуля сомножителя в круглых скобках, умноженного на \dot{z}^{μ}/\dot{z}^0 .

Таким образом, оказывается, что на комбинационных частотах $\Omega_{\theta}^{(-)}$ и $\Omega_r^{(-)}$ мощность поглощения является отрицательной, а на частотах $\Omega_{\theta}^{(+)}$ и $\Omega_r^{(+)}$ — положительной. В этом нетрудно усмотреть аналогию с рассмотренным выше примером поглощения волн гармоническим осциллятором, переносимым вдоль окружности. Действительно, частица, совершающая колебания вокруг равновесной окружности, представляет собой как раз такую систему. В отличие от формулы (15.27) соответствующие слагаемые

в (27) являются резонансными не только для частот $\Omega \pm \Omega_0$, но и для более высоких гармоник $m\Omega \pm \Omega_0$. Появление высших гармоник связано с учетом релятивистского характера движения (в нерелятивистском случае вклад высших гармоник мал). Радиальные колебания, как отмечалось выше, сопровождаются азимутальными и временными осцилляциями, поэтому соответствующие корреляционные функции в (27) $I^{(\pm)}$ имеют более сложный вид. Это, однако, не изменяет вывода о существовании отрицательного поглощения на разностных частотах $m\Omega - \Omega_r$, причем, как и в аксиальном случае, появление высших гармоник обусловлено релятивистскими поправками. На частотах $m\Omega + \Omega_r$ имеет место поглощение.

Два последних слагаемых в (27) описывают поглощение на гармониках частоты обращения $\omega = m\Omega$. Знак этого выражения зависит от величины расстройки частоты вынуждающей силы ω относительно $m\Omega$, как и в случае электронов, движущихся по окружности в магнитном поле (15.38). В действительности (27) описывает также и случай движения в однородном магнитном поле в плоском пространстве-времени, если рассматривать круговые орбиты заряженных частиц при наличии внешнего магнитного поля (§ 3) и затем положить $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. В предельном случае метрики Минковского частоты Ω_0 и Ω_r становятся равными частоте обращения Ω , смещенные резонансы (15), (16) сливаются с несмещенными (14), и выражение (27) переходит в (15.38). Таким образом, полученная выше формула (27) обобщает результат, найденный ранее для случая пространства Минковского на случай движения частиц около черных дыр. Подчеркнем, что наличие гравитационного поля приводит к «расщеплению» циклотронного резонанса и появлению смещенных резонансов (15), (16), при этом выделяются линии отрицательного поглощения $\omega = \Omega_0^{(-)}$, $\omega = \Omega_r^{(-)}$. Этот эффект аналогичен появлению смещенных резонансов в скрещенном поле (см. (15.41, 43)).

Коэффициенты усиления в нерелятивистском случае

Для нерелятивистских частиц в сумме по m в (27) существенны лишь основные слагаемые с $m = \pm 1$. Рассмотрим этот случай более подробно, предполагая, что движение происходит в поле Керра и внешнее магнитное поле отсутствует. Как следует из изложенного в § 3, в поле Керра существуют устойчивые круговые орбиты нерелятивистских частиц, причем угловые скорости движения частиц в направлении вращения дыры (прямые орбиты) и в противоположном направлении не совпадают. Будем считать, что для прямых орбит $\Omega > 0$, для обратных — $\Omega < 0$. Тогда резонансный режим взаимодействия частиц и волн может иметь место при различном соотношении между знаками m и Ω . Очевидно, возможны следующие комбинации: а) $\Omega > 0$, $m = 1$ — движение частицы и вращение фазы волны происходит в одном направлении, совпадающем с направлением вращения черной дыры; б) $\Omega < 0$,

$m = -1$ — частица и фаза волны вращаются в сторону, противоположную направлению вращения дыры; в) $\Omega > 0$, $m = -1$ — вращение частицы прямое, фаза волны вращается в противоположную сторону; г) $\Omega < 0$, $m = 1$ — вращение частицы обратное, фазы волны прямое.

Рассмотрим резонансы на смещенных частотах (16), соответствующие возбуждению аксиальных колебаний. В этом случае прямому вращению соответствует частота аксиальных колебаний, по абсолютной величине меньшая частоте обращения, в случае же обратного вращения частицы частота колебаний оказывается больше частоты обращения. С помощью формул (3.18) и (3.83) нетрудно установить, что в случае а) имеет место поглощение на частоте

$$\Omega_{\theta}^{(+)} = \frac{\Omega_s}{1 + a\Omega_s} \left[1 + \left(1 - 4a\Omega_s + \frac{3a^2}{r^2} \right)^{1/2} \right] \quad (31)$$

и усиление на частоте

$$\Omega_{\theta}^{(-)} = \frac{\Omega_s}{1 + a\Omega_s} \left[1 - \left(1 - 4a\Omega_s + \frac{3a^2}{r^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (32)$$

Случай в) оказывается нерезонансным (нет положительной комбинации частот Ω и Ω_s), а в случаях б) и г) имеет место только поглощение; соответствующие частоты равны

$$\Omega_{\theta}^{(+)} = \frac{\Omega_s}{1 - a\Omega_s} \left[\left(1 + 4a\Omega_s + \frac{3a^2}{r^2} \right)^{1/2} \mp 1 \right]. \quad (33)$$

Перейдем теперь к радиальным резонансам (15). Поскольку частота Ω_r по абсолютной величине всегда меньше частоты обращения Ω , то в случае прямого вращения имеют место поглощение на частоте

$$\Omega_r^{(+)} = \frac{\Omega_s}{1 + a\Omega_s} \left[1 + \left(1 - \frac{6M}{r} + 8a\Omega_s - \frac{3a^2}{r^2} \right)^{1/2} \right] \quad (34)$$

и усиление на частоте

$$\Omega_r^{(-)} = \frac{\Omega_s}{1 + a\Omega_s} \left[1 - \left(1 - \frac{6M}{r} + 8a\Omega_s - \frac{3a^2}{r^2} \right)^{1/2} \right] \quad (35)$$

(случай а). В случае обратного вращения (г) резонанс на частоте

$$\Omega_r^{(+)} = \frac{\Omega_s}{1 - a\Omega_s} \left[1 + \left(1 - \frac{6M}{r} - 8a\Omega_s - \frac{3a^2}{r^2} \right)^{1/2} \right] \quad (36)$$

соответствует поглощению, а резонанс на частоте

$$\Omega_r^{(-)} = \frac{\Omega_s}{1 - a\Omega_s} \left[1 - \left(1 - \frac{6M}{r} - 8a\Omega_s - \frac{3a^2}{r^2} \right)^{1/2} \right] \quad (37)$$

— усилению волн.

Введем в качестве характеристики падающего электромагнитного излучения спектральную интенсивность $I(\omega)$, определив ее с помощью соотношения

$$I = \oint_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{8\pi} \langle |\Phi_0^{\text{in}}|^2 \rangle d\Omega = \int_0^\infty I(\omega) d\omega, \quad (38)$$

где Φ_0^{in} — скаляр Ньюмена — Пенроуза для падающих волн, интегрирование ведется по бесконечно удаленной сферической поверхности, скобками обозначена операция усреднения по фазам. В соответствии с разложением Φ_0 по спиновым сферическим функциям для спектральной интенсивности $I(\omega)$ имеем разложение

$$I(\omega) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l I_{lm}(\omega). \quad (39)$$

Выражение для мощности поглощения (27) было получено в виде ряда по азимутальному числу m и интеграла по положительной полуоси переменной ω :

$$P = \int_0^\infty \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_m(\omega) d\omega. \quad (40)$$

Можно поэтому ввести коэффициент поглощения волны с заданными значениями ω и m исходя из соотношения

$$P_m(\omega) = \sum_{l=|m|}^{\infty} k_{lm}(\omega) I_{lm}(\omega). \quad (41)$$

Для нахождения коэффициентов $k_m(\omega)$ необходимо выразить компоненты корреляционного тензора $I^{\mu\nu}(\omega, m)$ через спектральную плотность $I(\omega)$. Ограничимся при этом случаем $a=0$, т. е. невращающейся дыры. Воспользовавшись результатами гл. II, представим радиальные функции ${}_1R_{lm}$, ${}_0R_{lm}$ и ${}_{-1}R_{lm}$, входящие в разложение Φ_0 , Φ_1 и Φ_2 , соответственно в виде

$${}_1R_{lm} = -\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} \mathcal{D}_0 U_{\omega lm}, \quad (42)$$

$${}_{-1}R_{lm} = -\frac{\Delta}{2r} \sqrt{l(l+1)} \mathcal{D}_0^+ U_{\omega lm}, \quad (43)$$

$${}_0R_{lm} = -\frac{l(l+1)}{\sqrt{2} r^2} U_{\omega lm}, \quad (44)$$

где функция $U(r)$ представляет собой решение дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dr^{*2}} + \omega^2 - \frac{\Delta}{r^4} l(l+1) \right) U_{\omega lm}(r) = 0. \quad (45)$$

Выражая компоненты тензора $f_{\mu\nu}$ через Φ_0, Φ_1, Φ_2 по формуле (5.3), выражая спинные сферические гармоники ${}_{\pm 1}S_{lm}(\theta)$ через ${}_0S_{lm}(\theta) \equiv S_{lm}(\theta)$ согласно соотношениям (D.7) (D.8) и подставляя полученные выражения в формулу (3), для ковариантных компонент силы f_μ получим

$$f_\mu(\omega, m) = \frac{e}{\mu^2 \omega} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=|m|}^{\infty} (\hat{g}_\mu(\omega, l, m) S_{lm}(\theta) U_{\omega lm}(r)) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}, r=r_0}, \quad (46)$$

где оператор $\hat{g}_\mu(\omega, l, m)$ имеет компоненты

$$\hat{g}_r(\omega, l, m) = \left(\frac{r^2}{\Delta} m \omega \Omega - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) - i \Omega \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r^*}, \quad (47)$$

$$\hat{g}_\theta(\omega, l, m) = (\Omega l(l+1) \sin^2 \theta - m \omega) \frac{i}{\sin \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r^*}, \quad (48)$$

$$\hat{g}_\varphi(\omega, l, m) = \frac{\hat{g}_0(\omega, l, m)}{\Omega} = \left(\omega \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - i m \frac{\partial}{\partial r^*} \right), \quad (49)$$

и r^* — «черепашья» координата.

Выберем нормировку решения $U_{\omega lm}(r)$ так, чтобы при $r \rightarrow \infty$ падающая часть волны имела асимптотическое поведение

$$U_{\omega lm}^{(\text{in})}(r \rightarrow \infty) = \frac{\sqrt{2\pi}}{i \sqrt{l(l+1)}} C_{\omega lm} \omega^{-1} \exp(-i\omega r), \quad (50)$$

где $C_{\omega lm}$ — случайные коэффициенты, нормированные условием

$$\langle C_{\omega' l' m'}^* C_{\omega l m} \rangle = \delta_{m m'} \delta_{l l'} \delta(\omega - \omega') I_{lm}(\omega) \quad (51)$$

(формула (51) соответствует определениям (38), (39)). Тогда, подставляя разложения (46) для компонент силы в формулу (18), после усреднения найдем связь между компонентами корреляционного тензора $I_{\mu\nu}(\omega, m)$ и величинами $I_{lm}(\omega)$.

В нерелятивистском случае $\omega M \sim \Omega M \ll 1$ и основной вклад вносят слагаемые с $l=1, m=\pm 1$; при этом решение уравнения (45) в области $\omega r \ll 1$, сшитое с асимптотическим решением (50), имеет следующий вид:

$$U_{\omega 1 m}(r) = \frac{2\sqrt{\pi} i}{3} r^2 M C_{\omega 1 m}. \quad (52)$$

Подставляя (52) в (46) и учитывая, что производные $\partial S_{1m}/\partial \theta$ обращаются в нуль при $\theta = \pi/2$ для $m = \pm 1$, в результа-

те усреднения квадратичных комбинаций компонент силы в соответствии с формулой (18) найдем

$$\begin{aligned}\langle f_r^+(\omega', m') f_r(\omega, m) \rangle &= \frac{\omega^2}{3} \langle C_{\omega' 1 m'}^* C_{\omega 1 m} \rangle = \\ &= \frac{\omega^2}{3} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') I_{1m}(\omega)\end{aligned}\quad (53)$$

и аналогичные соотношения для других компонент. Сопоставляя полученные выражения с определением корреляционного тензора (18), найдем

$$\begin{aligned}I_{rr}(\omega, m) &= \frac{\omega^2}{3} I_{1m}(\omega); \quad I_{\varphi\varphi}(\omega, m) = \frac{\omega^2}{3} \frac{\Delta^2}{r^2} I_{1m}(\omega); \\ I_{\theta\theta}(\omega, m) &= \frac{\omega^2 r^4}{3} \left(\frac{m\omega}{2} - \Omega \right)^2 I_{1m}(\omega); \quad I_{r\varphi} = -im \frac{\omega^2}{3} \frac{\Delta}{r} I_{1m}(\omega).\end{aligned}\quad (54)$$

Предположим, что спектральное распределение интенсивности падающего излучения имеет лоренцеву форму

$$I_{lm}(\omega) = I_{lm} \frac{\Delta\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Delta\omega)^2}, \quad (55)$$

где ω_0 — положение максимума, а $\Delta\omega$ — ширина линии падающего излучения. Если величина $\Delta\omega$ меньше расстояния между резонансами (31)–(37), так что перекрытия не происходит, то в случае близости ω_0 к одной из резонансных частот $\Omega^{(-)}_r$ и $\Omega^{(+)}_r$ будет иметь место «чистое» поглощение, а для частот $\Omega^{(-)}_r$, $\Omega^{(+)}_r$ — усиление волн. Коэффициенты поглощения (усиления) получим, подставляя (54) в (27) и далее в (41). Результирующие выражения для радиальных и аксиальных резонансов ($m = \pm 1$) имеют вид

$$k_m(\omega \sim \Omega_r^{(\pm)}) = \pm \frac{e^2 \omega^3 \Delta_0^2}{3\mu\omega^0 \Omega_r r_0^4} \left(1 \pm \frac{\Delta_0}{r_0} \frac{\kappa}{\Omega_r} \right)^2 \frac{\nu}{(\omega - \Omega_r^{(\pm)})^2 + \nu^2}, \quad (56)$$

$$k_m(\omega \sim \Omega_\theta^{(\pm)}) = \pm \frac{e^2 \omega^3 \Delta_0}{3\mu\omega^0 \Omega_\theta} \left(\frac{m\omega}{2} - \Omega \right)^2 \frac{\nu}{(\omega - \Omega_\theta^{(\pm)})^2 + \nu^2}. \quad (57)$$

§ 17. ИНДУЦИРОВАННОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Взаимодействие пробной частицы в поле Керра с гравитационными волнами

Взаимодействие пробных тел, движущихся по круговым орбитам в поле Шварцшильда или Керра, с гравитационными волнами может иметь характер отрицательного поглощения. Для расчета эффекта нужно рассмотреть вынужденные колебания проб-

ной массы под действием поля гравитационных волн, фазу которых будем считать случайной величиной.

Представим метрический тензор в виде $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}$, где $g_{\mu\nu}^{(0)}$ — метрика фонового пространства-времени, $h_{\mu\nu} \ll 1$ — добавка, описывающая поле (слабых) гравитационных волн. Линеаризованное по $h_{\mu\nu}$ уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{D^{(0)}}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} \equiv \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{(0)\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = -\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}, \quad (1)$$

где поправки к символам Кристоффеля равны

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu (0)} (h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\nu\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) - h^{\mu\nu (0)} \Gamma_{\nu\alpha\beta}^{(0)}. \quad (2)$$

Ввиду малости $h_{\mu\nu}$ ищем приближенное решение (1) в виде

$$x^\mu(s) = z^\mu(s) + \xi^\mu(s), \quad (3)$$

выбирая в качестве невозмущенной траектории окружность в плоскости $\theta = \pi/2$, т. е.

$$z^\mu(s) = u^\mu s, \quad u^\mu = u^0 (1, 0, 0, \omega_0). \quad (4)$$

В дальнейшем индекс нуль у величин, относящихся к фоновой метрике, будем опускать.

Переходя к параметру t , связанному с s соотношением $dt/ds = u^0$ в линейном по ξ^μ приближении, получим систему уравнений, совпадающую с (16.1) — (16.2), причем

$$\dot{f}^\mu = -\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta (u^0)^{-2}, \quad \gamma_\nu^\mu = 2\Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\lambda (u^0)^{-1}, \quad U^\mu = \frac{1}{2} \gamma_\nu^\mu u^\nu (u^0)^{-1}. \quad (5)$$

Рассмотрим вынужденные колебания частицы под действием гравитационных волн (ГВ). Представим поле ГВ в виде разложения

$$h_{\mu\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{\mu\nu}^{m\omega}(r, \theta) \exp(i(m\varphi - \omega t)), \quad (6)$$

а поправки $\xi^\mu(t)$ — с помощью фурье-преобразования (16.8). Решение системы имеет вид (16.11) — (16.13), где под $f_{m\omega}^\mu$ следует понимать

$$f_{m\omega}^\mu = i\omega_m H_{m\omega}^\mu + \frac{1}{2} G_{,\mu}^{m\omega}; \quad H_\mu^{m\omega} = h_{0\mu}^{m\omega} + \omega_0 h_{3\mu}^{m\omega}; \quad G^{m\omega} = H_0^{m\omega} + \omega_0 H_3^{m\omega}. \quad (7)$$

Сечение отрицательного поглощения

В результате воздействия на систему гравитационных волн резонансных частот энергия системы будет претерпевать системати-

ческое изменение. Будем считать гравитационные волны имеющими случайные фазы и усредним квадратичные комбинации величин $h_{\mu\nu}$ по фазам

$$\langle h_{\mu\nu}^{m\omega} h_{\lambda\tau}^{m'\omega'} \rangle = \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') \langle h_{\mu\nu} h_{\lambda\tau} \rangle_{m\omega} = \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') I_{\mu\nu\lambda\tau}, \quad (8)$$

где $I_{\mu\nu\lambda\tau}$ — корреляционная функция.

Вычислим изменение полной энергии пробного тела в результате взаимодействия. Используя уравнение (1), можно получить соотношение

$$\frac{dE}{dt} = \mu u^0 \left\langle \xi^\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial t} \right\rangle, \quad (9)$$

в котором величины в правой части берутся на невозмущенной траектории и подразумевается усреднение по фазам ГВ. Подставляя в (9) решения (16.11)–(16.13) и учитывая (8), найдем для случая фоновой метрики Керра

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \pi \mu u^0 \int_0^\infty \omega d\omega \sum_{m=-\infty}^\infty \left\{ \sum_{\lambda=-1,1} \lambda \frac{g^{11}}{\omega_r} \left\langle \left| \frac{1}{2} G_{,r} - i\lambda \omega_r H_r - \gamma_1^A \times \right. \right. \right. \\ & \times \left(H_A + \frac{i\lambda G_{,A}}{2\omega_r} \right) \left. \right\rangle_{m\omega}^2 \delta(\omega_m + \lambda\omega_r) + \lambda \frac{g^{22}}{\omega_\theta} \langle |f_2|^2 \rangle \delta(\omega_m + \lambda\omega_\theta) + \\ & + \frac{1}{2} \langle G_{,A} \dot{G}_{,B} \rangle_{m\omega} \zeta^{AB} \delta'(\omega_m) + \text{Im} \left\langle 2H_A \dot{G}_{,B} \zeta^{AB} - \frac{Fr}{\omega_r} G_{,r}^* \right\rangle_{m\omega} \delta(\omega_m) \Big\}, \quad (10) \end{aligned}$$

где $\zeta^{AB} = g^{AB} - \gamma^A \gamma^B \omega_r^{-2}$, δ' — производная от δ -функции.

Характерной особенностью этого выражения является наличие знакоопределенных слагаемых, соответствующих радиальным и аксиальным резонансам. Заметим, что вклады аксиальных резонансов в случае метрики Шварцшильда должны быть в общем энергетическом балансе объединены с вкладом орбитального резонанса.

Как видно из формулы (10), на частотах радиальных резонансов $\Omega_r^- = m\omega_0 - \omega_r$ производная dE/dt отрицательна [236], т. е. система теряет энергию и происходит усиление гравитационных волн. В случае нерелятивистского движения взаимодействие наиболее эффективно на частоте $\omega_r = 2\omega_0 - \omega_r$. Эффективное сечение отрицательного поглощения плоской гравитационной волны с поляризацией \oplus (\otimes), распространяющейся под углом θ_0 к оси z , оказывается равным

$$\sigma_{\oplus} = 8\pi \frac{\mu M}{r} \frac{(1 + \cos^2 \theta_0)^2}{\Delta\omega}, \quad \sigma_{\otimes} = 32\pi \frac{\mu M}{r} \frac{\cos^2 \theta_0}{\Delta\omega}, \quad (11)$$

где $\Delta\omega$ — ширина спектра ГВ. Как видно из этой формулы, сечение может быть большим для достаточно узкой линии гравитационного излучения не только по сравнению с величиной, определяемой гравитационным радиусом тел, но и с геометрическими размерами самой орбиты. Для оценки максимальной величины эффекта подставим в качестве $\Delta\omega$ величину $\Delta\omega = \omega_0/\omega_0$ (естественная ширина линии). В результате получим по порядку величины $\sigma_{\max} \simeq r^3/M \simeq rS/M$, где S — площадь орбиты. Таким образом, эффективное сечение процесса в случае идеального резонанса превышает «геометрическое» сечение S в $r/M = (c/v)^2 \gg 1$ раз.

Исследование массивных полей, ассоциируемых с элементарными частицами, в пространствах-времени, содержащих черные дыры, представляет интерес в связи с гипотезой о возможности существования микроскопических черных дыр, образующихся на ранних стадиях космологического расширения [237, 238]. Гравитационный радиус шварцшильдовой черной дыры с массой 10^{15} г имеет порядок комптоновской длины волны протона 10^{-13} см, и взаимодействие таких дыр с веществом должно носить существенно квантовый характер. Более того, сами черные дыры такого масштаба являются квантовыми объектами в том смысле, что в гравитационном поле этих дыр должно происходить интенсивное рождение частиц из вакуума. Как было показано Хокингом [239, 13], черная дыра массы M рождает частицы с планковским спектром при температуре T (КэВ) $\approx 10^{19}/M$ (г). Как следует из оценок [239] и более точных вычислений [96, 240, 241], первичная черная дыра массы $5 \cdot 10^{14}$ г должна к настоящему моменту времени исчезнуть, испуская нейтрино, фотоны, гравитоны, а также массивные частицы.

Образование первичных черных дыр могло происходить в эпоху, когда, согласно принятым в настоящее время моделям в теории элементарных частиц, помимо гравитационного и электромагнитного возможно существование классических полей иной природы — скалярных и полей Янга — Миллса. Поэтому при изучении квантовых аспектов физики черных дыр представляется целесообразным рассматривать фоновые поля более широкого класса, включающие такие дополнительные параметры, как магнитный монопольный заряд и цветовые заряды. Оказывается, что поле Керра — Ньюмена допускает естественное обобщение на случай самосогласованных систем полей Эйнштейна — Янга — Миллса и Эйнштейна — Янга — Миллса — Хиггса — Хиггса. Существуют точные решения соответствующих систем уравнений, описывающие черные дыры с метрикой Керра — Ньюмена и янг-миллсовскими и хиггсовыми «волосами». В случае системы Эйнштейна — Янга — Миллса — Хиггса эти решения генетически связаны с решениями Ву — Янга [250], описывающими точечные магнитные монополи и дайоны в пространстве Минковского. Магнитный заряд приводит к интересным особенностям квантового рождения частиц, обусловленным существованием добавочного (полевого) вклада в угловой

момент заряженной частицы в поле магнитного монополя [242], а также аксиальной аномалией [243—246]. Поэтому мы предварительно обсудим некоторые свойства «обычного» поля Керра — Ньюмена при наличии магнитного заряда. Далее, учитывая, что в калибровочных теориях со спонтанным нарушением симметрии может возникать космологическая постоянная, мы также остановимся на решениях Керра — Ньюмена — де Ситтера.

§ 18. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

Квантование магнитного заряда

Введение в электродинамику магнитного заряда делает невозможным существование непрерывного вектор-потенциала, поскольку ротор такого потенциала имел бы нулевой поток через любую замкнутую поверхность, в том числе и окружающую монополь. Поэтому всякое выражение для вектор-потенциала, приводящее к ненулевому потоку магнитного поля через поверхность, окружающую монополь, должно иметь особенность вдоль некоторой линии, исходящей из точки локализации монополя, — дираковскую струну [247]. В частности, выражение, вытекающее из формул (8.84) — (8.86), для 1-формы 4-потенциала поля Керра — Ньюмена при наличии электрического Q и магнитного P зарядов

$$A = A_\mu dx^\mu = \Sigma^{-1} (Qr - aP \cos \theta) (dt - a \sin^2 \theta d\varphi) + P \cos \theta d\varphi \quad (1)$$

сингулярно на полярной оси, где $A_\varphi \simeq P$ и, следовательно, величина $A_\mu A^\mu$ обращается в бесконечность. С помощью преобразования калибровки

$$A \rightarrow A' = A - P d\varphi \quad (2)$$

получим потенциал, не сингулярный при $\theta=0$, но имеющий особенность вдоль отрицательной полярной полуоси $\theta=\pi$. Напротив, преобразование

$$A \rightarrow A'' = A + P d\varphi \quad (3)$$

позволяет избавиться от сингулярности при $\theta=\pi$, однако «струна» остается вдоль положительного направления полярной оси ($\theta=0$).

Если взаимодействие некоторого электрически заряженного поля ψ с магнитным монополем имеет калибровочную природу, то переход от потенциала A' к потенциалу A'' индуцирует преобразование фазы поля $\psi \rightarrow \psi \exp(2ieP\varphi)$. Условие однозначности поля ψ приводит к требованию

$$2eP = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4)$$

представляющему собой условие Дирака квантования магнитного заряда. При его выполнении «струна» ненаблюдаема в экспериментах с полем ψ . Альтернативное обоснование условия квантования (4) магнитного заряда основано на наблюдении, что элект-

ромагнитное поле дайона (частицы, обладающей электрическим e и магнитным P зарядами) имеет собственный момент количества движения eP [248], квантование которого приводит к условию (4) [249]. Если формулировать теорию на языке геометрий расслоенных пространств, то можно избежать введения дираковской струны в классическом описании магнитных монополей [250]. В этом подходе дискретность магнитного заряда также возникает в результате квантования.

Согласно современной точке зрения, электродинамика как калибровочная теория с группой $U(1)$ является составной частью теории с более широкой группой калибровочной симметрии. При погружении $U(1)$ в связную компактную группу, например $SU(2)$, монопольное решение можно сделать не имеющим особенностей типа дираковской струны. Квантование магнитного заряда в этом случае будет иметь место по топологическим причинам, если группа, в которую погружается $U(1)$, полупроста [251].

«Цветные» черные дыры

Рассмотрим некоторую алгебру Ли, порождаемую набором эрмитовых матриц T_a ($a=1\dots N$), удовлетворяющих перестановочным соотношениям

$$[T_a, T_b] = iC_{ab}^c T_c, \quad (5)$$

где $C_{ab}^c = -C_{ba}^c$ — структурные константы. В соответствии с калибровочным принципом будем считать, что эта алгебра задает группу локальных преобразований симметрии для некоторого поля ψ , преобразующегося по одному из неприводимых представлений группы

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x), \quad U(x) = \exp(-i\omega_a(x)T^a), \quad (6)$$

где параметры ω_a зависят от пространственно-временных координат. Пусть ∇_μ — оператор ковариантного дифференцирования (в смысле метрики пространства-времени) поля $\psi(x)$. Тогда оператор

$$D_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu(x), \quad (7)$$

где $A_\mu(x)$ — элемент алгебры Ли (поле Янга — Миллса)

$$A_\mu = A_\mu^a T_a, \quad (8)$$

при калибровочном преобразовании (6) будет изменяться по закону

$$D_\mu \rightarrow U(x) D_\mu U^+(x), \quad (9)$$

если калибровочное поле A_μ преобразуется согласно правилу

$$A_\mu \rightarrow U(x) A_\mu U^+(x) - \frac{i}{e} \frac{\partial U(x)}{\partial x^\mu} U^+(x). \quad (10)$$

Введем соответствующий полю A_μ тензор напряженностей как

коммутатор (рассматриваемый на множестве пространственно-временных скаляров) производных (7)

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ie} [D_\mu, D_\nu] = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu + ie [A_\mu, A_\nu], \quad (11)$$

или в компонентной записи $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$, где

$$F_{\mu\nu}^a = \nabla_\mu A_\nu^a - \nabla_\nu A_\mu^a - e C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (12)$$

Тензор $F_{\mu\nu}$, очевидно, преобразуется при локальном преобразовании (6) как оператор D_μ , т. е.

$$F_{\mu\nu} \rightarrow U(x) F_{\mu\nu} U^\dagger(x). \quad (13)$$

Замена в лагранжиане Эйнштейна — Максвелла электромагнитного поля набором безмассовых калибровочных полей $F_{\mu\nu}^a$ приводит к калибровочно-инвариантному лагранжиану

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} (R + \gamma_{ab} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}), \quad (14)$$

где γ_{ab} — инвариантная метрика на группе внутренней симметрии. Варьируя лагранжиан (14), получаем калибровочно-инвариантные уравнения поля

$$\nabla_\nu F^{a\mu\nu} = e C_{bc}^a F^{b\mu\nu} A_\nu^c \quad (15)$$

и уравнения Эйнштейна, содержащие в правой части тензор энергии импульса поля Янга — Миллса

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\gamma_{ab}}{4\pi} \left(F_{\mu\lambda}^a F_\nu^{b\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F^{b\alpha\beta} \right). \quad (16)$$

Для компонент дуального тензора $\tilde{F}_{\mu\nu}^a = 1/2 \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} F^{a\lambda\tau}$, в отличие от случая электродинамики, уравнения также неоднородны

$$\nabla_\nu \tilde{F}^{a\mu\nu} = e C_{bc}^a \tilde{F}^{b\mu\nu} A_\nu^c. \quad (17)$$

Нетрудно заметить, что если выбрать потенциалы A_μ^a «параллельными» во внутреннем пространстве, т. е. $A_\mu^a = \beta^a A_\mu$, где коэффициенты β^a не зависят от координат, то выражение (16) сведется к тензору электромагнитного поля A_μ , умноженному на постоянную $\gamma_{ab} \beta^a \beta^b$, которую можно положить равной единице. Одновременно в формулах (15) и (17) обращаются в нуль нелинейные члены в правых частях (поскольку $C_{bc}^a = -C_{cb}^a$) и уравнения поля Янга — Миллса становятся линейными и совпадающими с уравнениями Максвелла без источников. Поэтому решение системы уравнений Эйнштейна — Янга — Миллса с «параллельными» во внутреннем пространстве полями всегда можно построить, если

известно соответствующее решение системы уравнений Эйнштейна — Максвелла [252]. Таким путем строятся решения, описывающие «цветные» черные дыры [33]: метрика совпадает с метрикой Керра — Ньюмена (1.1) с точностью до замены

$$Q^2 \rightarrow \gamma_{ab}(Q_a Q_b + P_a P_b), \quad (18)$$

где Q_a и P_a — цветовые электрические и магнитные заряды, а поля Янга — Миллса задаются 1-формами

$$A_a = A_{a\mu} dx^\mu = \frac{Q_a r - a P_a}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi) + P_a \cos \theta d\varphi. \quad (19)$$

Это решение, как и его максвелловский прототип (1), имеет особенность в виде струны Дирака. Аналогичные решения можно построить при отличной от нуля космологической постоянной [253].

Черные дыры Ву — Янга

Ву и Янгом [254] было показано, что для системы уравнений Янга — Миллса — Хиггса со спонтанно нарушенной группой внутренней симметрии $SU(2)$ существуют решения, которые в электромагнитном секторе описывают точечный магнитный монополи (дайдон), однако без дираковской струны. Эти решения допускают обобщение на искривленное пространство-время [265—260]; соответствующая метрика совпадает с метрикой Керра — Ньюмена [258—259], возможно также включение параметра Томимацу — Сато [260] и т. п. Как известно, сингулярные решения Ву — Янга послужили прототипом регулярного монопольного решения Полякова [261] — т'Хоофта [262] и соответствующего дайонного решения Джулиа — Зи [263]. Регулярные решения также обсуждались с учетом влияния гравитации [264—266], соответствующие поправки малы [264], если масса монополя не близка к планковской. Сингулярные же решения при учете гравитации изменяются существенно — особенность оказывается скрытой за горизонтом событий.

Рассмотрим калибровочное поле A_μ , ассоциируемое с локальной изотопической группой симметрии $SU(2)$. В этом случае генераторами, нормированными условием

$$Sp(T^a T^b) = 1/2 \delta^{ab}. \quad (20)$$

являются матрицы Паули с множителем $1/2$, $T^a = \tau^a/2$; а структурные константы совпадают с компонентами трехмерного тензора Леви — Чивита $C^a_{bc} = \epsilon^{abc}$, ($\epsilon^{123} = 1$). Соответствующий тензор напряженностей имеет компоненты

$$F^a_{\mu\nu} = A^a_{\nu,\mu} - A^a_{\mu,\nu} - e \epsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \quad (21)$$

Введем далее изовекторный триплет полей Хиггса

$$\Phi = \Phi^a \tau^a/2, \quad (22)$$

при этом ковариантная производная (7) будет действовать на компоненты Φ^a согласно равенству

$$D_\mu \Phi^a = \nabla_\mu \Phi^a - e \epsilon^{abc} A_\mu^b \Phi^c. \quad (23)$$

Запишем действие для системы полей A_μ^a , Φ^a в гравитационном поле, локально-инвариантное относительно калибровочной группы $SU(2)$ и приводящее к спонтанному нарушению симметрии по механизму Хиггса

$$S = \frac{1}{8\pi} \int \sqrt{-g} \left[-\Lambda - \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + g^{\mu\nu} (D_\mu \Phi^a) (D_\nu \Phi^a) - 2\lambda V \right] d^4x, \quad (24)$$

где эффективный потенциал

$$V = 1/4 (\Phi^b \Phi^b - v^2)^2, \quad v^2 = \text{const} > 0, \quad (25)$$

имеет минимум при отличном от нуля значении квадрата изовектора Φ^b

$$\Phi^b \Phi^b = v^2. \quad (26)$$

При выборе потенциала в виде (25) значение V_0 в точке минимума (26) равно нулю, выбор ненулевого значения V_0 эквивалентен введению космологической постоянной Λ , которая также включена в действие (24) в качестве независимого параметра.

Варьирование действия (24) приводит к уравнениям для полей A_μ^a и Φ^a

$$D_\nu F^{a\mu\nu} = e \epsilon^{abc} \Phi^b D^\mu \Phi^c, \quad D_\mu D^\mu \Phi^a = \lambda (v^2 - \Phi^b \Phi^b) \Phi^a \quad (27)$$

и к уравнениям Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (28)$$

с источником

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left\{ F_{\lambda\mu}^a F_\nu^{a\lambda} + (D_\mu \Phi^a) (D_\nu \Phi^a) + g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^a F^{a\alpha\beta} - \frac{1}{2} (D_\alpha \Phi^a) (D^\alpha \Phi^a) + \lambda V \right] \right\}. \quad (29)$$

Для построения интересующего нас решения этой системы можно воспользоваться калибровочной симметрией. Если выбрать калибровку, в которой

$$\Phi^a = v \delta^{a3}; \quad A_\mu^a = A_\mu \delta^{a3}, \quad v = \text{const}, \quad (30)$$

то, как легко видеть из формул (21), (23), (27) нелинейные члены в выражении для $F_{\mu\nu}$ и в уравнениях для полей A_μ^a и Φ^a исче-

зают, причем уравнение для поля Хиггса удовлетворяется тривиально ($\Phi^a = \text{const}$). Одновременно исчезает вклад поля Хиггса в источник гравитационного поля (29), который становится совпадающим с тензором энергии-импульса электромагнитного поля, порождаемого тем же потенциалом A_μ . В результате система сводится к системе уравнений Эйнштейна — Максвелла (вообще говоря, с космологической постоянной), для которой интересующее нас дайонное решение известно как решение Керра — Ньюмена — де Ситтера. Соответствующая метрика была найдена Картером [21]; более общий случай рассматривался Фроловым [268]

$$ds^2 = \frac{\Delta_r}{I^2 \Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - \frac{\Delta_\theta}{I^2 \Sigma} \sin^2 \theta [a dt - (r^2 + a^2) d\varphi]^2 - \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 - \frac{\Sigma}{\Delta_\theta} d\theta^2, \quad (31)$$

где

$$\Delta_r = \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) (r^2 + a^2) - 2Mr + Q^2 + P^2$$

$$\Delta_\theta = 1 + \frac{\Lambda}{3} a^2 \cos^2 \theta; \quad I = 1 + \frac{\Lambda}{3} a^2, \quad (32)$$

а 4-потенциал (при выборе струны вдоль отрицательной полярной полуоси) имеет вид

$$A_\mu dx^\mu = \frac{1}{I} \left[\left(\frac{Qr - Pa \cos \theta}{\Sigma} \right) (dt - a \sin^2 \theta d\varphi) + P(\cos \theta - 1) d\varphi \right]. \quad (33)$$

Здесь M , a и Q — свободные параметры, играющие роль массы, параметра вращения и электрического заряда черной дыры (последний с точностью до множителя I , см. ниже), а P — магнитный заряд, связь которого с калибровочной константой e будет определена ниже.

В отличие от решения Ву — Янга (или Полякова — т'Хофта) потенциал (33) имеет особенность типа дираковской струны. В этом решении, однако, изовектор Φ^a направлен не вдоль оси z в изотопическом пространстве, а вдоль вектора n^a , параллельного радиус-вектору в координатном пространстве

$$n^a = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad (34)$$

где θ , φ — углы сферической системы координат.

Можно ожидать, что, совершая локальный изотопический поворот в каждой пространственной точке таким образом, чтобы совместить ось z с направлением (34) в изотопическом пространстве, мы сможем избавиться одновременно и от дираковской струны [267].

Искомое преобразование, удовлетворяющее требованию

$$U(\theta, \varphi) \tau^3 U^+(\theta, \varphi) = \tau^a n^a(\theta, \varphi), \quad (35)$$

имеет следующий вид

$$U = e^{-\frac{i\tau^3}{2}\varphi} e^{-\frac{i\tau^2}{2}\theta} e^{\frac{i\tau^1}{2}\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 e^{-i\varphi} \\ \sin \theta/2 e^{i\varphi} & \cos \theta/2 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Отметим полезные соотношения

$$\begin{aligned} i \frac{\partial U}{\partial \varphi} U^+ &= \frac{1}{2} (\tau^3 - \tau^a n^a), \\ i \frac{\partial U}{\partial \theta} U^+ &= \frac{1}{2} (\tau^a e_\varphi^a), \end{aligned} \quad (37)$$

где $e_\varphi^a = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$.

Воспользуемся теперь формулой (10) преобразования калибровочного поля, подставляя в правую часть $A_\mu = A_\mu \tau^3$ с компонентами из (33). Выражение для 1-формы преобразованного поля с учетом соотношений (37) примет вид:

$$\begin{aligned} A_\mu^a dx^\mu \frac{\tau^a}{2} &= \frac{(Qr - Pa \cos \theta)}{I \Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi) \frac{\tau^a n^a}{2} - \frac{1}{e} \frac{\tau^a e_\varphi^a}{2} d\theta + \\ &+ \left[\left(\frac{P}{I} (\cos \theta - 1) + \frac{1}{e} \right) \frac{\tau^a n^a}{2} - \frac{1}{e} \frac{\tau^3}{2} \right] d\varphi. \end{aligned} \quad (38)$$

«Подозрительным» на наличие особенности вдоль полярной оси является последнее слагаемое в правой части (38). Для его преобразования применим легко проверяемое соотношение

$$\tau^a n^a (\cos \theta - 1) = \tau^3 - \tau^a n^a + \sin \theta \tau^a e_\theta^a, \quad (39)$$

где $e_\theta^a = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$.

Нетрудно видеть, что, полагая выполненным условие квантования

$$\frac{P}{I} = \frac{1}{e}, \quad (40)$$

можно привести последнее слагаемое к виду

$$\frac{P}{I} \sin \theta \frac{\tau^a e_\theta^a}{2} d\varphi,$$

откуда следует, что $A_\mu A^\mu$ не будет иметь особенности вдоль полярной оси, т. е. дираковская струна в новой калибровке действительно исчезает. В случае плоского пространства-времени ($M = a = Q = P = 0$), переходя к декартовым пространственным координатам, найдем

$$\Phi^a = n^a v; \quad A_0^a = Q/r n^a; \quad A^{ai} = -P/r \epsilon^{abi} n^b, \quad (41)$$

что соответствует дайону с электрическим зарядом Q и магнитным зарядом P . Соответствующие (41) сферические компоненты трехмерной части потенциала имеют вид

$$A^r = 0; \quad A^{a\theta} = -\frac{P e_\Phi^a}{r}; \quad A^{a\varphi} = \frac{P e_\theta^a}{r}. \quad (42)$$

Может показаться, что при отличных от нуля Λ и a требование (40) противоречит условию квантования Дирака (4). Однако при $I \neq 1$ физическим значением магнитного заряда является не P , а P/I , в чем можно убедиться, вычислив поток магнитного поля через сферическую поверхность в калибровке $A_\mu^a = A_\mu \delta^{a3}$

$$\oint_{r=\text{const}} F_{\theta\varphi} d\theta \wedge d\varphi = -4\pi \frac{P}{I}. \quad (43)$$

Аналогично физический электрический заряд есть Q/I , так как

$$\oint_{r=\text{const}} \tilde{F}_{\theta\varphi} d\theta \wedge d\varphi = \oint \frac{\Sigma \sin \theta}{I^2} F^{tr} d\theta d\varphi = -4\pi \frac{Q}{I}. \quad (44)$$

Метрика Керра — Ньюмена — де Ситтера

Рассматриваемое поле принадлежит к заряженному типу \mathcal{D} по Петрову. Выбирая векторы l^μ и n^μ изотропной тетрады Ньюмена — Пенроуза вдоль главных изотропных направлений, будем иметь

$$l^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta_r} I, 1, 0, \frac{aI}{\Delta_r} \right); \quad n^\mu = \frac{1}{2\Sigma} (I(r^2 + a^2), -\Delta_r, 0, aI),$$

$$m^\mu = (r + ia \cos \theta)^{-1} (2\Delta_\theta)^{-1/2} \left(ial \sin \theta, 0, \Delta_\theta, \frac{iI}{\sin \theta} \right). \quad (45)$$

При $\Lambda=0$ эта тетрада переходит в тетраду Киннерсли для метрики Керра — Ньюмена. Отличные от нуля спиновые коэффициенты при таком выборе тетрады равны

$$\rho = (ia \cos \theta - r)^{-1}; \quad \tau = -ia \sin \theta \sqrt{\Delta_\theta / V^2 \Sigma}; \quad \mu = \Delta_r \rho / 2\Sigma;$$

$$\beta = -\frac{\rho^*}{2\sqrt{2} \sin \theta} (V \Delta_\theta \sin \theta)_{,\theta}; \quad \pi = ia \rho^2 \sqrt{\Delta_\theta} \sin \theta / \sqrt{2};$$

$$\alpha = \pi - \beta^*; \quad \gamma = \mu + (\Delta_r)_{,r} / 4\Sigma. \quad (46)$$

Ненулевые проекции тензоров Вейля и Максвелла имеют вид

$$\Phi_1 = -(Q + iP) \frac{\rho^2}{2}; \quad \Psi_2 = M \rho^3 + \frac{1}{\Sigma} (Q^2 + P^2) \rho^2, \quad (47)$$

при этом $\tilde{\Lambda} = 1/6\Lambda$. Приведем также тетрадные проекции 4-потенциала

$$A_l = (Qr - aP) \Delta_r^{-1} = \frac{2\Sigma A_n}{\Delta_r}; \quad A_m = i\rho^* P (1 - \cos\theta) (\sqrt{2\Delta_\theta} \sin\theta)^{-1}. \quad (48)$$

Пространство-время, описываемое элементом длины (31), помимо горизонта событий, окружающего сингулярность, — горизонта черной дыры $r = r_+$ —, обладает космологическим горизонтом $r = r_{++}$, отделяющим область пространства времени, которая недоступна наблюдателю, находящемуся в области $r_+ < r < r_{++}$, ни при каких значениях времени. Положение горизонтов событий определяется уравнением

$$\Delta_r(r_H) = 0, \quad (49)$$

которое, вообще говоря, имеет 4 корня. В статическом случае ($a=0$) и при отсутствии зарядов ($P=0$, $Q=0$) корней будет три, если $M\Lambda^2 < 1/3$:

$$r_{++} = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos \alpha, \quad r_+ = -\frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos \left(\frac{\alpha + \pi}{3} \right),$$

$$\alpha = \arccos \left(-3\sqrt{M^2/\Lambda} \right). \quad (50)$$

Третий корень $r_3 = -(r_+ + r_{++})$ лежит вне физической области. При выполнении условия $M\Lambda^2 \ll 1$ космологический горизонт находится далеко от горизонта черной дыры, и в общем случае можно получить следующие приближенные формулы:

$$r_+ \simeq r_g + \frac{\Lambda r_g^2}{6} \frac{r_g^2 + a^2}{r_g - M}, \quad (51)$$

$$r_{++} \simeq r_c - \frac{M - (Q^2 + P^2)/2r_c}{1 + M/r_c}, \quad (52)$$

где $r_g = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2 - P^2}$, $r_c = \sqrt{3/\Lambda}$.

Времениподобный вектор Киллинга $\xi_{(t)} = \partial/\partial t$ становится изотропным на поверхностях $r_0(\theta)$, отделяющих эргосферу от горизонтов событий, определяемых из уравнения $g_{00}(r_0, \theta) = 0$. Таких поверхностей в физической области — две, при условии $M\Lambda^2 \ll 1$ одна из них локализована вблизи горизонта черной дыры,

$$r_0^{(+)} = r_0 + \frac{\Lambda r_0^2}{6} \frac{r_0^2 + a^2}{r_0 - M}, \quad (53)$$

где $r_0 = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - P^2 - a^2 \cos^2 \theta}$ — граница эргосферы черной дыры Керра — Ньюмена; а вторая — вблизи космологического горизонта,

$$r_0^{(+)} \simeq r_{++} - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{2r_c}. \quad (54)$$

Угловая скорость вращения горизонтов событий определяется из условия (1.15), что приводит к соотношению

$$\Omega_H = \frac{a}{r_H^2 + a^2}, \quad (55)$$

в которое в качестве r_H следует подставить r_+ или r_{++} .

«Поверхностная гравитация» κ_H на горизонтах событий определяется из уравнения (1.25), вычисления приводят к выражению

$$\kappa_H = \frac{r_H}{aI} \left[\left(I - \frac{M}{r_H} \right) \Omega_H - \frac{2}{3} \Lambda a \right], \quad (56)$$

которое при $\Lambda=0$ переходит в (1.26). При $r=r_{++}$ это выражение, как и следовало ожидать, отрицательно, поскольку знаки ускорений свободного падения на горизонте черной дыры и космологическом горизонте различны. При одновременном выполнении условий

$$\Delta_r = 0, \quad d\Delta_r/dr = 0 \quad (57)$$

происходит слияние горизонтов. Совместное решение этих уравнений дает корни

$$r_{1,2} = 3M/2b [1 \mp (1 - 8bd/9M^2)^{1/2}]; \quad b = 1 - a^2/r_c^2; \\ d = a^2 + Q^2 + P^2, \quad (58)$$

первый из которых отвечает слиянию внутреннего и внешнего горизонтов черной дыры $r_- = r_+$, а второй — слиянию горизонта черной дыры с космологическим горизонтом $r_+ = r_{++}$. В точках слияния $\kappa_H = 0$. Подставляя (58) в равенство $d\Delta_r/dr = 0$, находим соотношения между параметрами a , M , Q , P и Λ , при которых происходит слияние

$$br_c^2/3 - 6a/b + (9M^2/b^2 - 2d/b - br_c^2/2) [1 \pm (1 - 8bd/9M^2)^{1/2}] = 0, \quad (59)$$

где верхний знак соответствует $r_+ = r_{++}$, а нижний $r_- = r_+$. Эти равенства определяют физические области значений параметров a , M , Q , P и Λ , при которых существует невырожденное решение Керра — Ньюмена — де Ситтера, обсуждение случая $a=Q=P=0$ см. в [270].

§ 19. МАССИВНОЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим массивное скалярное поле, обладающее электрическим зарядом, на фоне абелева решения Керра — Ньюмена — де Ситтера.

Действие для массивного заряженного скалярного поля с минимальной связью имеет вид

$$S \equiv \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x = \\ = \frac{1}{8\pi} \int \{[(\nabla_\mu - ieA_\mu)\psi]^* [(\nabla_\nu + ieA_\nu)\psi] g^{\mu\nu} - \mu^2 \psi^* \psi\} \sqrt{-g} d^4x, \quad (1)$$

что приводит к полемому уравнению

$$g^{\mu\nu} (\nabla_\mu + ieA_\mu) (\nabla_\nu + ieA_\nu) \psi + \mu^2 \psi = 0. \quad (2)$$

Из инвариантности действия относительно локального изменения фазы $\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi$ вытекает сохранение тока:

$$J_\mu = \frac{i}{2} \psi^* (\nabla_\mu + ieA_\mu) \psi + \text{к. с.}, \quad \nabla_\mu J^\mu = 0. \quad (3)$$

Для двух решений ψ, ψ' уравнения (2) введем скалярное произведение

$$(\psi', \psi) = \int_\Sigma J^\mu(\psi', \psi) \sqrt{-g} d\Sigma_\mu, \quad (4)$$

где Σ — некоторая пространственно-подобная гиперповерхность и $J^\mu(\psi', \psi)$ — полуторалинейная форма, диагональная часть которой совпадает с сохраняющимся током (19.3)

$$J^\mu(\psi', \psi) = \frac{i}{2} \psi'^* (\nabla_\mu + ieA_\mu) \psi - \frac{i}{2} \psi (\nabla_\mu - ieA_\mu) \psi'^*. \quad (5)$$

Как в плоском пространстве-времени, скалярное произведение (4) для уравнения Клейна — Гордона не является положительно определенным.

В рассматриваемом случае аксиально-симметричных и стационарных полей фона сохраняются также токи (векторные плотности)

$$\xi_A^\mu = \left(T_\nu^\mu + \frac{1}{4\pi} J^\mu A_\nu \right) \xi_A^\mu \sqrt{-g}; \quad \frac{\partial \xi_A^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad (6)$$

где ξ_A^μ , $A=t$, φ — векторы Киллинга. В формуле (6) T_ν^μ — метрический тензор энергии-импульса,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (\overset{\circ}{\nabla}_\mu \psi)^* \overset{\circ}{\nabla}_\nu \psi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}; \quad \overset{\circ}{\nabla}_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu, \quad (7)$$

связанный с каноническим тензором $T_{\mu\nu}^{\text{can}}$ соотношением $T_{\mu\nu}^{\text{can}} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi} J_\mu A_\nu$.

Разделение переменных

Дифференциальные операторы $\hat{E} = i\hat{\xi}_{(t)}^\mu \nabla_\mu$ и $\hat{L} = -i\hat{\xi}_{(\varphi)}^\mu \nabla_\mu$ (4.28) так же, как и в случае безмассового скалярного поля (§ 4), коммутируют с оператором Клейна — Гордона (и эрмитовы по отношению к скалярному произведению (4)). Поэтому решение уравнения (2) с заданными собственными значениями ω и m этих операторов ($m=0, \pm 1, \pm 2 \dots$) будет иметь вид

$$\psi(t, r, \theta, \varphi) = \psi_{\omega m}(r, \theta) e^{-i\omega t + im\varphi}. \quad (8)$$

При подстановке (8) в (2) удобно представить оператор в левой части уравнения в формализме Ньюмена — Пенроуза, выбирая в качестве базиса изотропную тетраду (18.45). Учитывая явный вид спинных коэффициентов (18.46) и тетрадных проекций 4-потенциала (18.48), для $\psi_{\omega m}$ будем иметь уравнение

$$[\Delta_r (\hat{\mathcal{Z}}_1 \hat{\mathcal{Z}}_0^+ + \hat{\mathcal{Z}}_1^+ \hat{\mathcal{Z}}_0) + V \bar{\Delta}_\theta (\hat{\mathcal{Z}}_1^+ V \bar{\Delta}_\theta \hat{\mathcal{Z}}_0 + \hat{\mathcal{Z}}_1 V \bar{\Delta}_\theta \hat{\mathcal{Z}}_0^+) - 2\mu^2 \Sigma] \psi_{\omega m} = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Z}}_n &= \frac{\partial}{\partial r} - \frac{iI}{\Delta_r} [\omega(r^2 + a^2) - eQr - (m - eP)a] + \frac{n}{\Delta_r} \Delta'_r; \quad \hat{\mathcal{Z}}_n^+ = \hat{\mathcal{Z}}_n^*; \\ \hat{\mathcal{Z}}_s &= \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{I}{\Delta_\theta} \left(a\omega \sin \theta - \frac{m - eP}{\sin \theta} \right) + \\ &\quad + (s + eP) \operatorname{ctg} \theta + (eP - s) \frac{\Lambda a^2 \sin 2\theta}{6\Delta_\theta}; \\ \hat{\mathcal{Z}}_s^+ &= \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{I}{\Delta_\theta} \left(a\omega \sin \theta - \frac{m - eP}{\sin \theta} \right) + \\ &\quad + (s - eP) \operatorname{ctg} \theta - (s + eP) \frac{\Lambda a^2 \sin 2\theta}{6\Delta_\theta} \end{aligned} \quad (10)$$

— операторы, обобщающие (7.10), (7.11) и переходящие в последние при $e=0, \Lambda=0$. Нетрудно заметить, что первый оператор в круглых скобках в левой части уравнения (9) зависит только от r , второй — только от θ , а последнее слагаемое имеет вид суммы функций от r и θ ; поэтому переменные в (9) разделяются $\psi_{\omega m} = S_{\omega m}(\theta) R_{\omega m}(r)$, при этом угловая функция удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left(\operatorname{ctg} \theta - \frac{\Lambda a^2 \sin 2\theta}{3\Delta_\theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left[(eP - a\omega \cos \theta)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{m - eP(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} \right)^2 - (eP)^2 - (a\omega)^2 + 2(m - eP)a\omega - \right] \right] S_{\omega m} = 0 \end{aligned}$$

$$-4ePa\omega \cos \theta \left] \Delta_{\theta}^{-2} + (\lambda - \mu^2 a^2 \cos^2 \theta) \Delta_{\theta}^{-1} \right] S = 0, \quad (11)$$

λ — собственное значение. Решения этого уравнения известны при некоторых частных значениях входящих в него параметров. При $a=0$ (либо при $\mu=\omega=\Lambda=0$) решением (11) являются спинорные сферические функции ${}_{eP}S_{l,m-eP}(\theta)$ со спиновым весом eP и проекцией орбитального момента $m-eP$. В случае $\Lambda=0$ и $eP=0$ будем иметь сфероидальные функции $S'_{lm}(\theta)$ с $\gamma=a\sqrt{\omega^2-\mu^2}$. Если $\mu=\Lambda=0$, решением (11) будут спинорные сфероидальные функции ${}_{eP}S'_{l,m-eP}(\theta)$. Соответствующие собственные значения можно получить с помощью формул, приведенных в Дополнении. Заметим, что минимальное значение орбитального квантового числа l не может быть меньше $|eP|$.

Радиальное уравнение, вытекающее из (19.9), имеет вид

$$\left\{ \Delta_r \frac{\partial}{\partial r} \Delta_r \frac{\partial}{\partial r} + [I\mathcal{K} - e(Qr - aP)]^2 - \Delta_r(\lambda + \mu^2 r^2) \right\} R_{\omega m} = 0, \quad (12)$$

где $\mathcal{K} = \omega(r^2 + a^2) - ma$. Вводя «черепашую» координату r^* с помощью соотношения $dr^* = dr(r^2 + a^2)/\Delta_r$ ($r^* \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow r_+$ и $r^* \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow r_{++}$), а также новую радиальную функцию $\chi_{\omega m}(r) = (r^2 + a^2)^{1/2} R_{\omega m}(r)$, приведем (12) к виду уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2 \chi_{\omega m}}{dr^{*2}} + V_{\text{eff}} \chi_{\omega m} = 0 \quad (13)$$

с эффективным потенциалом

$$V_{\text{eff}} = (r^2 + a^2)^{-2} \{ (\lambda + \mu^2 r^2) \Delta_r + \Delta_r (r \Delta_r)' (r^2 + a^2)^{-1} - 3\Delta_r^2 r^2 (r^2 + a^2)^{-2} - [I\mathcal{K} - (eQ - aP)]^2 \}, \quad (14)$$

переходящим в (4.67) при $\mu=\Lambda=0$. Потенциал (14) принимает постоянные значения на горизонтах $r_H = r_+, r_{++}$

$$V_{\text{eff}}(r_H) = -k_H^2; \quad k_H = I[\omega - (m - eP)\Omega_H - eV_H], \quad (15)$$

где $V_H = Qr_H/[I(r_H^2 + a^2)]$ — электростатический потенциал горизонтов. Поэтому в окрестностях горизонтов линейно независимые решения радиального уравнения (13) имеют вид

$$u_H^{(\pm)}(r) \underset{r \rightarrow r_H}{\sim} e^{\pm i k_H r^*}.$$

В случае $\Lambda=0$ потенциал (14) при $r^* \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) стремится к постоянному значению

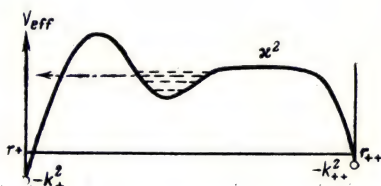
$$V_{\text{eff}} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} (\omega^2 - \mu^2) \equiv \kappa^2, \quad (16)$$

поэтому частица может уходить на бесконечность при $\omega > \mu$ и асимптотически расходящиеся и сходящиеся волны описываются решениями

$$u^{(\pm)} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{\pm i\kappa r}.$$

Отметим, что на горизонтах событий частица ведет себя как безмассовая, масса не входит в асимптотические выражения (16). Напротив, в промежуточной области влияние массы существенно: при $\mu \neq 0$ потенциал (14) имеет локальный минимум, отвечающий возможности существования квазисвязанных состояний массивной частицы в окрестности черной дыры (рис. 16).

Рис. 16. Эффективный потенциал в радиальном уравнении для массивного скалярного поля в метрике Керра—Ньюмена—де Ситтера



В окрестности космологического горизонта событий (при условии $r_{++} \gg r_+$) поведение эффективного потенциала в случае ($a = e = 0$) описывается формулой

$$V_{\text{eff}} - \omega^2 \simeq \left(1 - \frac{r^2}{r_{++}^2}\right) \left[\frac{\lambda}{r^2} + \left(\mu^2 - \frac{2}{r_{++}^2}\right) \right]. \quad (17)$$

При $a = 0$ одним из собственных значений является $\lambda = 0$; если при этом масса частицы удовлетворяет условию $\mu < \sqrt{2}r_{++}^{-1}$, то правая часть (19.19) может стать отрицательной (в частности, это имеет место при $\mu = 0$). Такое поведение характерно для минимально связанного скалярного поля. В случае конформной связи (4.6) величина $V_{\text{eff}} - \omega^2$ всюду неотрицательна [271]*).

Суперрадиация и квантовое рождение частиц

В качестве двух линейно независимых решений радиального уравнения (13) целесообразно выбрать $\chi^{(+)}$, описывающее сходящуюся (поглощаемую черной дырой) волну при $r \rightarrow r_+$, $\chi^{(+)} \sim e^{-ik_+ r^*}$ и $\chi^{(++)}$, описывающее волну, уходящую за космологический горизонт, $\chi^{(++)} \sim e^{ik_{++} r^*}$ при $r \rightarrow r_{++}$. Будем считать, что радиус горизонта событий черной дыры r_+ существенно меньше радиуса космологического горизонта r_{++} . Тогда существует промежуточная область $r \in \mathcal{D}$, $r_+ \ll r \ll r_{++}$, в которой потенциал V_{eff} близок к постоянной x^2 (17) и решение (при $\omega > \mu$) будет описываться промежуточными асимптотическими формулами (18).

* Добавление в лангранжиан члена $1/6 R \psi^2$ ведет к замене в (17) $\mu^2 \rightarrow \mu^2 + 2/r_{++}^2$.

Выбирая нормировочные коэффициенты так, чтобы при $\Lambda \rightarrow 0$ $\chi^{(+)}$ переходило в χ^{in} , а $\chi^{(++)}$ — в χ^{up} , введенные в § 4, получим решения, имеющие в указанных трех асимптотических областях следующий вид:

$$\chi^{(+)} = \begin{cases} |2k_+|^{-1/2} \tau \exp(-ik_+ r^*), & r \rightarrow r_+; \\ |2\kappa|^{-1/2} [\gamma \exp(i\kappa r) + \delta \exp(-i\kappa r)], & r \in \mathcal{D}; \\ |2k_{++}|^{-1/2} [\exp(-ik_{++} r^*) + \sigma \exp(ik_{++} r^*)], & r \rightarrow r_{++}, \end{cases}$$

$$\chi^{(++)} = \begin{cases} \varepsilon_+ \varepsilon_{++} |2k_+|^{-1/2} [\tau^{-1} \exp(ik_+ r^*) - (\sigma \tau^{-1})^* \exp(-ik_+ r^*)], & r \rightarrow r_+; \\ \varepsilon_+ \varepsilon_{++} |2\kappa|^{-1/2} [\alpha \exp(i\kappa r) + \beta \exp(-i\kappa r)], & r \in \mathcal{D}; \\ |2k_{++}|^{-1/2} \exp(ik_{++} r^*), & r \rightarrow r_{++}; \end{cases} \quad (18)$$

где введены знаковые функции $\varepsilon_+ = k_+ / |k_+|$ и $\varepsilon_{++} = k_{++} / |k_{++}|$. Из условий постоянства вронскианов для линейно независимых пар решений $W(\chi^{(++)}, \chi^{(++)*})$; $W(\chi^{(+)}, \chi^{(+)*})$; $W(\chi^{(++)}, \chi^{(+)})$; $W(\chi^{(++)}, \chi^{(+)*})$ находим соотношения

$$|\gamma|^2 - |\delta|^2 = -\varepsilon_+ |\tau|^2, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = \varepsilon_{++}, \quad |\tau|^2 \varepsilon_+ \varepsilon_{++} + |\sigma|^2 = 1, \\ \alpha \delta - \beta \gamma = 1, \quad \alpha \gamma^* - \beta \delta^* = \sigma^*. \quad (19)$$

Рассмотрим подробнее поведение решений (18) в промежуточной асимптотической области \mathcal{D} . Соотношения (19) показывают, что в этой области существуют суперрадиантные потоки как от черной дыры, так и от космологического горизонта. Действительно, решение $\chi^{(+)}$ описывает волну, падающую из \mathcal{D} на черную дыру и испытывающую отражение с коэффициентом $|\gamma/\delta|^2$, а решение $\chi^{(++)}$ — волну, падающую из \mathcal{D} на космологический горизонт, и отражающуюся от него с коэффициентом $|\beta/\alpha|$. При выполнении условия суперрадиации на горизонте черной дыры $k_+ < 0$, как видно из (19), коэффициент отражения $|\gamma/\delta|^2 > 1$, т. е. происходит усиление волны. Аналогично при $k_{++} < 0$, как показывает соотношение (19), $|\beta/\alpha|^2 > 1$, т. е. происходит отражение волны от космологического горизонта с увеличенной амплитудой. С другой стороны, в области $r \sim r_{++}$ существует суперрадиантный поток от черной дыры лишь в области частот

$$m\Omega_{++} + eV_{++} < \omega < m\Omega_+ + eV_+. \quad (20)$$

Это следует из соотношения (19), показывающего, что коэффициент отражения σ становится большим единицы по модулю при условии $\varepsilon_+ \varepsilon_{++} < 0$, что (для рассматриваемого случая $r_{++} \gg r_+$) эквивалентно (20). Таким образом, с точки зрения наблюдателя, находящегося вблизи космологического горизонта, спектр суперрадиации черной дыры обрезается снизу. Физически это обусловлено тем, что наблюдатель, находящийся вблизи r_{++} , должен вращаться вместе с горизонтом событий и отсчитывать потенциал от

значения V_{++} . Вводя дополнительные нормировочные множители $\tau/2\pi$ и $1/2\pi$ в решения $\psi^{(+)}$ и $\psi^{(++)}$ соответственно, получим моды, нормированные в смысле скалярного произведения (4) на «единицу»

$$(\psi_{\omega'l'm'}^{(+)}, \psi_{\omega lm}^{(+)}) = \frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_{++}} (\psi_{\omega'l'm'}^{(++)}, \psi_{\omega lm}^{(++)}) = \varepsilon_{++} \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (21)$$

(как обычно, скалярные произведения вычисляются с учетом лишь падающих волн в решениях (18) с последующим растяжением области интегрирования по «черепашье» координате r^* на бесконечный интервал, что соответствует представлению о широких волновых пакетах в областях Коши).

Если встать на «наивную» точку зрения, что положительно-частотные решения должны быть аналитическими функциями в нижней полуплоскости комплексифицированной временной координаты t , то из (19) будет следовать, что моды $\psi_{\omega lm}^{(+)}$ являются положительно-частотными при $k_{++} > 0$, а моды $\psi_{\omega lm}^{(++)}$ — при $k_+ > 0$. Оператор вторично-квантованного поля в терминах разложения по таким модам будет иметь вид

$$\begin{aligned} \psi = \sum_{lm} \int_{-\infty}^{\infty} [\theta(k_+) (\psi_{\omega lm}^{(++)} a'_{\omega lm} + \psi_{\omega lm}^{(++)*} b'_{\omega lm}{}^{\dagger} + \\ + \theta(k_{++}) (\psi_{\omega lm}^{(+)} c'_{\omega lm} + \psi_{\omega lm}^{(+)*} d'_{\omega lm}{}^{\dagger})] d\omega, \end{aligned} \quad (22)$$

где $a'_{\omega lm}$ и $b'_{\omega lm}{}^{\dagger}$ — операторы уничтожения частицы и рождения античастицы, уходящих за космологический горизонт, а c' и $d'{}^{\dagger}$ — соответствующие операторы для частиц, поглощаемых черной дырой (аналогичное разложение для оператора ψ^{\dagger} , эрмитово сопряженного к (22), будет содержать операторы $a'{}^{\dagger}$, b' , $c'{}^{\dagger}$ и d'). Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют стандартным бозевским перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [a'_{\omega'l'm'}, a'_{\omega lm}{}^{\dagger}] = [b'_{\omega'l'm'}, b'_{\omega lm}{}^{\dagger}] = [c'_{\omega'l'm'}, c'_{\omega lm}{}^{\dagger}] = \\ = [d'_{\omega'l'm'}, d'_{\omega lm}{}^{\dagger}] = \delta_{(\omega-\omega')} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \end{aligned} \quad (23)$$

все остальные коммутаторы равны нулю. Введенная система операторов уничтожения задает состояние вакуума Бульвара

$$a'_{\omega lm} |B\rangle = b'_{\omega lm} |B\rangle = c'_{\omega lm} |B\rangle = d'_{\omega lm} |B\rangle = 0. \quad (24)$$

Однако с точки зрения наблюдателей, находящихся вблизи горизонтов событий, такое определение положительных частот является нефизическим, поскольку соответствующие моды не ана-

литичны в нижней полуплоскости, не сингулярной на горизонтах крускаловой координаты U . Чтобы построить моды, обладающие требуемыми аналитическими свойствами по U , предварительно следует, как это было впервые указано Унру [273], построить решения уравнения Клейна—Гордона на втором листе аналитически расширенного многообразия (область I' на рис. 1) и составить такую линейную комбинацию с решениями в области I , которая была бы аналитична в нижней полуплоскости комплексифицированной координаты U . Для черной дыры, не окруженной космологическим горизонтом, такая процедура применяется к решениям типа «ur» (переходящим в $(++)$), в то время как для решений «ip» (переходящих в $(+)$) следует сохранить определение, данное выше (иначе говоря, выбор положительно-частотных решений должен производиться в терминах координат, не сингулярных на соответствующих поверхностях Коши). При наличии космологического горизонта аналогичная процедура должна применяться и к решениям типа $(+)$ (заменяющих «ip»-моды). Следуя аргументации Унру, будем рассматривать в качестве положительно-частотных решения в виде линейной комбинации мод $(+)$ с носителями в областях I и I' на рис. 1, которая аналитична в нижней полуплоскости комплексифицированной координаты Крускала U_{++} , вводимой при аналитическом продолжении метрики за космологический горизонт [268]. Результирующее разложение для оператора поля в области I имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = \sum_{l,m} \int_{-\infty}^{\infty} [|2\text{sh } 2q_+|^{-1/2} e^{q_+} (\psi_{\omega lm}^{(++)} a_{\omega lm} + \psi_{\omega lm}^{(++)*} b_{\omega lm}^\dagger) + \\ + |2\text{sh } 2q_{++}|^{-1/2} e^{q_{++}} (\psi_{\omega lm}^{(+)} c_{\omega lm} + \psi_{\omega lm}^{(+)*} d_{\omega lm}^\dagger)] d\omega, \end{aligned} \quad (25)$$

где $q_H = \pi k_H / 2\mu_H$. Здесь, в отличие от (20), нет ступенчатых функций, ограничивающих область интегрирования по ω . Множитель $(2\text{sh } 2q_H)^{-1/2}$ учитывает изменение нормировки моды с носителем в I при учете вклада в нормировочный интеграл также области I' (подробнее см. [273—275]). Перестановочные соотношения для операторов $a, a^\dagger; b, b^\dagger; c, c^\dagger$ и d, d^\dagger не отличаются от (23) с точностью до изменения области изменения параметра ω (который в (23) был ограничен условиями $k_{++} > 0$ и $k_+ > 0$ для пар a, b и c, d соответственно). Система операторов уничтожения a, b, c, d задает вакуумное состояние, которое является обобщением вакуума Унру на случай космологической черной дыры и которое мы будем называть вакуумом Гиббонса—Хокинга (представление о рождении частиц космологическим горизонтом было впервые сформулировано в работе этих авторов [268]):

$$a_{\omega lm} |GH\rangle = b_{\omega lm} |GH\rangle = c_{\omega lm} |GH\rangle = d_{\omega lm} |GH\rangle = 0. \quad (26)$$

Выражения для вторично-квантовых операторов тока (3) и тензора энергии-импульса (7), билинейных по полям, получаются подстановкой разложения (22) в соответствующие классические выражения, предварительно симметризованные по ψ и ψ^* , чтобы результирующие операторы были эрмитовы. Нормального упорядочения операторов при этом производить не следует, иначе будет потеряна информация о поляризации вакуума гравитационным полем. С учетом этих замечаний находим вакуумное среднее оператора тока в состоянии вакуума Гиббонса—Хокинга

$$\langle GH | J^\mu | GH \rangle = \sum_{l,m} \int_{-\infty}^{\infty} [\text{cth } 2q_+ J^\mu(\psi^{(++)}) + \text{cth } 2q_{++} J^\mu(\psi^{(+)})] d\omega, \quad (27)$$

где $J^\mu(\psi)$ — формы (5) от соответствующих классических решений. Это выражение напоминает вакуумное среднее для обычной (не космологической) черной дыры в состоянии Хартля—Хокинга [14], описывающего черную дыру в термостате с температурой, равной температуре горизонта, однако в нашем случае температуры $T_+ = \kappa_+/2\pi$ и $T_{++} = \kappa_{++}/2\pi$ горизонтов различны. Подставляя в (27) асимптотики радиальных функций (18) и учитывая соотношения (19) для коэффициентов, можно показать, что вклады первого и второго слагаемых в (27) в радиальную компоненту тока взаимно уничтожаются для частот ниже порога космологической суперрадиации при формальном стремлении к нулю температур T_+ и T_{++} . Аналогичным образом строятся средние от компонент тензора энергии-импульса. Интегрируя при $T_{++} \rightarrow 0$ выражения для потоков энергии и углового момента от черной дыры, получим формулы для потери массы и момента вращения дырой за счет рождения частиц, уходящих на бесконечность

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M}{J} \right) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\mu}^{\infty} d\omega \sum_{lm} \frac{|\delta|^2 - |\gamma|^2}{\exp\left(\frac{2\pi k_+}{\kappa_+}\right) - 1} \begin{pmatrix} \omega \\ m \end{pmatrix}, \quad (28)$$

в частности, в пределе $\kappa_+ \rightarrow 0$ найдем потери, обусловленные спонтанной суперрадиацией:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M}{J} \right) = - \frac{1}{2\pi} \sum_{lm} \int_{\mu}^{\omega_{\max}} d\omega |\tau|^2 \begin{pmatrix} \omega \\ m \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где $\omega_{\max} = m\Omega_+ + eV_+$. Соответствующее выражение для потери электрического заряда имеет вид

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{lm} \left(\int_{\mu}^{\omega_{\max}^+} |\tau^+|^2 d\omega - \int_{\mu}^{\omega_{\max}^-} |\tau^-|^2 d\omega \right), \quad (30)$$

где $\omega_{\max}^{\pm} = m\Omega_{\pm} \pm |e|V_{\pm}$, τ^{\pm} — значения коэффициента прохождения при $e = \pm|e|$. Величина τ существенно зависит от орбитального момента l , она становится экспоненциально малой при больших l . Если дыра обладает магнитным зарядом, то $l \gg |eP|$, следовательно, при $|eP| \gg 1$ испускание заряженных частиц будет подавлено. Излучая нейтральные частицы, черная дыра будет терять массу и момент вращения, пока не перейдет в состояние экстремальной дыры Рейсснера—Нордстрема с $M^2 = Q^2 + P^2$ [242], в котором ее поверхностная гравитация (температура) равна нулю.

Квазистационарные состояния

Характерной особенностью радиального эффективного потенциала (14) является наличие минимума (рис. 16), отвечающего области локализации классических финитных орбит. Соответствующие состояния, в отличие от состояний заряда в кулоновом поле, не будут стационарными, так как центробежный потенциал вблизи горизонта начинает спадать и область возможной локализации состояний финитного движения оказывается отделенной от черной дыры лишь потенциальным барьером. В квантовой теории возможно тунеллирование частицы через потенциальный барьер с последующим поглощением ее черной дырой, вследствие чего могут существовать лишь квазистационарные состояния, распадающиеся за конечное время. Существует строгое доказательство [276] отсутствия дискретного спектра у оператора Клейна—Гордона в пространстве-времени Шварцшильда. Действительно, квазистационарные состояния уже не принадлежат дискретному спектру, а являются состояниями рассеяния. Однако для волнового пакета, локализованного внутри потенциальной ямы и построенного из состояний квазидискретного спектра, время жизни может оказаться достаточно большим, чтобы имело смысл говорить о квазистационарных состояниях. Для этого достаточно, чтобы мнимая часть энергии, пропорциональная обратному времени распада, была мала по сравнению с вещественной частью (иначе говоря, волновой пакет должен совершить много оборотов вокруг черной дыры прежде, чем будет захвачен ею). Мы увидим ниже, что это действительно имеет место при выполнении условия $\mu M \ll m_{PL}^2$ (для шварцшильдовой черной дыры), где $m_{PL} \sim 10 \text{ г}^{-5}$ — планковская масса.

Нетрудно оценить параметры квазистационарных состояний исходя из квазиклассических соображений. Боровский радиус для частицы μ в ньютоновском поле тяжелого тела массы M равен (для наглядности в нижеследующих формулах явно выписаны

постоянная Планка \hbar и гравитационная постоянная G)

$$r_B = \frac{\hbar^2}{GM\mu^2} = \lambda_c \frac{m_{PL}^2}{\mu M}, \quad (31)$$

где $\lambda_c = \hbar/\mu c$ — комптоновская длина волны частицы. С увеличением M радиус r_B уменьшается, в то время как радиус горизонта $r_g = 2GM$ растет. Равенство $r_g = r_B$ наступает при $M = m_{PL}^2/\sqrt{2}\mu$, что отвечает для μ , равному массе электрона, $M \sim 10^{17}$ г. Отношение

$$\frac{r_B}{r_g} = \frac{1}{2} \left(\frac{m_{PL}^2}{\mu M} \right)^2 \quad (32)$$

заведомо велико в случае $\mu M \ll m_{PL}^2$, т. е. микроскопических черных дыр.

В случае если отношение (32) меньше единицы, то могут существовать лишь возбужденные круговые орбиты, радиусы которых пропорциональны квадрату целого числа n , $r_n = r_B n^2$; нетрудно видеть, что n должно удовлетворять условию $n \geq \sqrt{2}(\mu M)/m_{PL}^2$. При $\mu M \gg 1$ такие состояния квазиклассичны (их затухание рассматривалось в [277, 278]). Ниже мы ограничимся случаем микроскопических черных дыр, $\mu M \ll 1$, для которого вычисления удастся прodelать аналитически. Как и выше, будем предполагать, что $r_{++} \gg r_+$, причем волновая функция в промежуточной асимптотической плоской области \mathcal{D} успевает затухнуть настолько, что ее последующее сшивание вблизи космологического горизонта можно не проводить (соответствующая оценка будет сделана ниже).

При сделанных предположениях радиальная функция (ненормированная) в области частот $\omega < \mu$ квазисвязанных состояний должна иметь в асимптотических областях следующий вид:

$$\chi_{\omega < \mu} = \begin{cases} Ae^{ik_+ r^*} + Be^{-ik_+ r^*}, & r \rightarrow r_+, \\ \exp(-|\kappa|r), & r \gg r_+, \end{cases} \quad (33)$$

где A и B — некоторые постоянные, $|\kappa| = (\mu^2 - \omega^2)^{1/2}$. Радиальная функция (33) описывает отражение волны, падающей на потенциальный барьер (рис. 16) слева. Поскольку в области $r \gg r_+$ волновая функция предполагается экспоненциально убывающей (возможностью тунеллирования на космологический горизонт пока пренебрегаем) и соответствующий поток вероятности равен нулю, коэффициент отражения по модулю равен единице, т. е. $|A| = |B|$, однако при рассеянии возникает изменение фазы δ , $B = Ae^{-2i\delta}$, по величине которого и можно судить о существовании квазистационарных состояний. Из общей теории резонансного рассеяния следует, что фаза δ в окрестности резонансных частот $\omega = \omega_n$ испы-

тывает резкое изменение на π , что можно записать в виде соотношения

$$\delta = \delta^{(0)} + \operatorname{arctg} \frac{\gamma_n}{(\omega - \omega_n)}, \quad (34)$$

где γ_n — ширина квазистационарного уровня, предполагаемая малой по сравнению с ω_n , $\delta^{(0)}$ — плавно изменяющаяся в окрестности $\omega = \omega_n$ функция. Если же рассматривать коэффициенты A и B в (33) как функции комплексной частоты $\omega = \omega' - i\omega''$, то коэффициент A будет обращаться в нуль в точке $\omega = \omega_n - i\gamma_n$. Поэтому для нахождения комплексных значений энергии квазистационарных состояний достаточно построить решение вида (33) и затем потребовать выполнения условия

$$A(\omega) = 0 \quad (35)$$

при комплексных ω . Эту операцию при условии $\mu M \ll m_{PL}^2$ удастся выполнить с помощью склейки асимптотических разложений для радиальной функции, полученной в перекрывающихся между собой областях изменения переменной r .

Покажем предварительно, что отыскание собственных значений энергии связанных состояний с помощью условия регулярности в начале координат можно применять и к задаче о спектре дайона в плоском пространстве-времени, причем решением уравнения, аналогичного (35), будут в этом случае вещественные значения энергии. В пространстве Минковского ($a = M = \Lambda = 0$) угловые функции представляют собой спинные сферические гармоники веса $s = eP$, $eP S_{l, m-eP}(\theta)$, а собственное значение

$$\lambda = l(l+1) - (eP)^2. \quad (36)$$

Радиальное уравнение (12) в результате введения новой переменной $z = 2r|\kappa|$ сводится к уравнению Уиттекера для функции $f(z) = rR$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\frac{q}{z} - \frac{1}{4} + \frac{1/4 - p^2}{z^2} \right) f = 0, \quad (37)$$

где $q = -eQ\omega/|\kappa|$, $p = (1/4 + \lambda - e^2 Q^2)^{1/2}$. Решение этого уравнения, экспоненциально спадающее при $z \gg 1$, есть функция Уиттекера $f = W_{q,p}(z)$. Рассмотрим поведение этого решения при $z \rightarrow 0$:

$$W_{q,p} \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{\Gamma(-2p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - q\right)} z^{1/2+p} + \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + p - q\right)} z^{1/2-p}. \quad (38)$$

Требование регулярности в начале координат приводит к условию квантования

$$1/2 + p - q = -n_r, \quad n_r = 1, 2, 3, \dots, \quad (39)$$

при этом гамма-функция в знаменателе второго слагаемого обращается в бесконечность. Отсюда находим спектр дайона в плоском пространстве-времени:

$$\omega_{n,l} = \mu \left[1 + \frac{(eQ)^2}{\left(\left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - e^2 (Q^2 + P^2) \right]^{1/2} + n_r + \frac{1}{2} \right)^2} \right]^{-1/2}. \quad (40)$$

Для черной дыры асимптотики типа (38) являются лишь промежуточными и должны быть сшиты с волновыми решениями на горизонте событий (что физически отвечает возможности поглощения частиц черной дырой). Приведем вычисления для случая $\Lambda=0$ и достаточно малых значений параметра $eQ \ll 1$. При выполнении этих условий угловое уравнение (11) сводится к уравнению для спиновых сферических функций (Д.9) веса $s=eP$ при этом собственные значения $\lambda = (l+eP+1)(l-eP) \equiv l'(l'+1)$, где введено (вообще говоря нецелое) число l' для удобства дальнейших расчетов. Радиальные функции можно построить, сшивая решения, найденные в двух перекрывающихся областях изменения координаты r . В области $r \gg r_+$ радиальное уравнение по-прежнему сводится к (37), и мы получаем

$$R = \frac{1}{r} W_{q,p}(2|\kappa|r), \quad (41)$$

где параметры q и p теперь равны

$$q = [(2\omega^2 - \mu^2)M - eQ\omega] |\kappa|^{-1}, \quad (42)$$

$$p = l' + 1/2. \quad (43)$$

Можно ожидать, что если искажение спектра вследствие изменения эффективного потенциала вблизи черной дыры (в частности, мнимая часть энергии) невелико, то его можно учесть, вводя в условие квантования (39) малую добавку

$$1 + l' - q = -n_r + \nu, \quad \nu \ll 1, \quad (44)$$

которую будем искать путем сшивания решения (41) с решением в ближней области. Для построения такого решения перейдем в (12) к новой безразмерной переменной

$$x = (r - r_+)(r_+ - r_-)^{-1} \quad (45)$$

и сделаем подстановку

$$R = x^\alpha (1+x)^\beta \Phi(x). \quad (46)$$

Рассмотрим область изменения радиальной координаты $r \ll 1/\omega$, которая при малых значениях ωM простирается вплоть до больших $r \gg r_+$ и перекрывается с областью, в которой справедливо

решение (41). Выберем постоянные α и β так, чтобы результирующее уравнение для φ имело бы три регулярные особые точки $x = -1, 0, \infty$:

$$\alpha = \pm ik_+(r_+^2 + a^2)(r_+ - r_-)^{-1}; \quad (47)$$

$$\beta = \pm i[k_+(r_+^2 + a^2)(r_+ - r_-)^{-1} + eQ - \omega(r_+ + r_-)].$$

Опуская члены, малые в рассматриваемой области изменения r , получим для φ гипергеометрическое уравнение

$$x(x+1)\varphi'' + [(2\alpha+1) + 2(\alpha+\beta+1)x]\varphi' + + [(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) - \lambda]\varphi = 0 \quad (48)$$

(здесь опущены также члены, малые при $\omega M \ll 1$, $\mu M \ll 1$). Пренебрегая величинами eQ и ωr_{\pm} по сравнению с l' , получим радиальную функцию в виде суммы двух линейно независимых решений:

$$R = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\alpha} \left[C_1 x^{-l'-1} F(l'+1, l'-2\alpha+1; 2l'+2; -\frac{1}{x}) + + C_2 x^{l'} F(-l', -l'-2\alpha+1; -2l'; -\frac{1}{x}) \right], \quad (49)$$

где в качестве α выбрано нижнее значение из (47). При малых x (т. е. $r \rightarrow r_+$) это решение имеет вид суммы входящей и выходящей волн

$$R = (C_1 A_1 + C_2 B_1) e^{-ik_+ r^*} + (C_1 A_2 + C_2 B_2) e^{ik_+ r^*}, \quad (50)$$

где коэффициенты имеют вид

$$A_1 = \frac{\Gamma(2l'+1)\Gamma(-2\alpha)}{\Gamma(l'+1-2\alpha)\Gamma(l'+1)}; \quad A_2 = \frac{\Gamma(2l'+2)\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(l'+1)\Gamma(l'+1+2\alpha)}; \\ B_1 = \frac{\Gamma(-2l')\Gamma(-2\alpha)}{\Gamma(-l'-2\alpha)\Gamma(-l')}; \quad B_2 = \frac{\Gamma(-2l')\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(-l')\Gamma(-l'+2\alpha)}. \quad (51)$$

При больших x (но малых ωr) решение (49) сшивается с асимптотикой (38) функции (41). Действительно, в этой области (49) переходит в

$$R \sim C_1 x^{-l'-1} + C_2 x^{l'}. \quad (52)$$

Приравнявая эти асимптотики, находим коэффициенты

$$C_1 = (r_+ - r_-)^{-l'-1} |2\kappa|^{-l'} \frac{\Gamma(2l'+1)}{\Gamma(1+l'-q)}, \\ C_2 = (r_+ - r_-)^{l'} |2\kappa|^{l'+1} \frac{\Gamma(-2l'-1)}{\Gamma(-l'-q)}. \quad (53)$$

Теперь нетрудно убедиться в том, что условие квантования (44) действительно обеспечивает выполнение требования отсутствия волны, выходящей из черной дыры

$$C_1 A_2 + C_2 B_2 = 0, \quad (54)$$

если добавка v в (44) равна

$$\begin{aligned} v = v_1 + i v_2 = & [2|\kappa|(r_+ - r_-)]^{2l'+1} \cdot \frac{\Gamma(2l' + n_r + 2)}{(2\pi n_r!)} \times \\ & \times \left[\frac{\Gamma(l' + 1) \Gamma(l' + 1)}{\Gamma(2l' + 1) \Gamma(2l' + 2)} \right]^2 \cdot [\operatorname{tg}(\pi l') \operatorname{ch}(2\pi|\alpha|) + i \operatorname{sh}(2\pi i \alpha)] \times \\ & \times \prod_{k=1}^{\infty} (1 + |2\alpha|^2 (k + l')^{-2})^{-1}. \end{aligned} \quad (55)$$

Эта величина, вообще говоря, комплексна, ее вещественная часть дает сдвиг уровней по сравнению с кулоновским спектром, а мнимая часть описывает затухание, обусловленное поглощением частиц черной дырой. Если l' — целое число (что в рассматриваемом приближении будет иметь место при отсутствии монополярного заряда у черной дыры, либо электрического заряда у скалярной частицы), то вещественная часть v_1 , как видно из (55), обращается в нуль, а выражение для мнимой части согласуется с полученным в [279—281].

Вещественная часть уравнения (44) приводит к водородоподобному спектру; пренебрегая релятивистскими поправками, получаем

$$\omega_n = \mu \left[1 - \frac{(\mu M - eQ)^2}{2n^2} \right], \quad n = l' + n_r + 1. \quad (56)$$

В этом приближении вращение черной дыры не оказывает влияния на положение уровней энергии (поправки тонкой и сверхтонкой структуры рассматривались в [280], поправки, обусловленные сдвигом уровней в поле монополя легко учесть с помощью (55)). Космологические поправки также можно учесть приближенно. В принципе, при наличии космологического горизонта возникает второй канал распада квазистационарных состояний путем туннелирования за космологический горизонт. Оценим этот эффект исходя из квазиклассических соображений. Поскольку в интересующем нас случае, когда область локализации квазисвязанных состояний далека от космологического горизонта, эффективный потенциал (14) в широкой области постоянен $U_{\text{eff}} \sim (\mu^2 - \omega^2)$, то туннелированием можно пренебречь до тех пор, пока интеграл

$$\int_{r_1}^{\infty} (\mu^2 - \omega^2)^{1/2} dr^*, \quad (57)$$

где r_1 — правая точка поворота, не будет порядка единицы. Это условие определяет максимальное значение главного квантового числа n_{\max} , выше которого становится существенным космологическое тунеллирование $n_{\max} \sim \mu r_{++} (\mu M - eQ)$.

С физической точки зрения представляет интерес обсудить возможность эффекта суперрадиации на квазисвязанных уровнях. Рассмотрим для простоты случай целых l' ($eP=0$). Введем декремент затухания уровней как мнимую часть комплексной частоты:

$$\omega = \omega_n - i\gamma, \quad (58)$$

тогда, сопоставляя с формулой (44), найдем

$$\gamma = \frac{\mu (\mu M - eQ)^2}{n^3} \nu_2. \quad (59)$$

Из (55) видно, что при $k_+ < 0$, т. е. при выполнении условия суперрадиации, величина γ становится отрицательной, что соответствует возбуждению уровней энергии. Нетрудно убедиться в том, что множество состояний квазидискретного спектра действительно включает суперрадиантные моды (при $a \neq 0$). Наибольший интерес представляет серия p -состояний с $l=1$, $n_r=0, 1, \dots$. С ростом радиального квантового числа n_r величина γ быстро убывает, поэтому ограничимся низшим состоянием $n_r=0$. Мнимая часть энергии уровня $\omega = \omega_n - i\gamma_n$ равна ($l=1$; $n_r=0$; $m = \pm 1$) с точностью до малых поправок

$$\gamma = -\frac{1}{48} m \frac{a}{M} \mu (\mu M)^8. \quad (60)$$

Состояние с $m=1$ испытывает отрицательное затухание, т. е. является неустойчивым. Подставляя в качестве μ массу π -мезона, для черной дыры массы $M \sim 0,1 m_{pL}^2 / \mu \sim 10^{14}$ г при $a \leq M$ получим оценку инкремента нарастания $|\gamma| \sim 10^{11}$ (1/с). Для микроскопических черных дыр $\mu M \ll 1$ потеря момента при развитии суперрадиационной неустойчивости происходит значительно быстрее, чем потеря массы (так как каждая частица уносит относительную долю углового момента $(aM)^{-1}$ и относительную массу μ/M , отношение скорости убывания момента J к скорости убывания массы M имеет порядок

$$J/\dot{M} \propto \frac{M}{a} \frac{1}{\mu M}). \quad (61)$$

Суперрадиационная неустойчивость существует и для квазисвязанных состояний (с большим l) вокруг черных дыр, гравита-

ционный радиус которых превышает боровский радиус ($\mu M > 1$). Такие состояния можно описывать квазиклассически [277, 278].

Заметим, что уширение уровней вследствие возможности тунелирования в черную дыру не приводит к их перекрытию; как видно из сопоставления формул (58) и (59), расстояние между соседними уровнями превышает γ при всех n .

Существенным отличием суперрадиации на квазисвязанных уровнях от «обычной» суперрадиации, при которой частицы уходят на бесконечность, является экспоненциальный характер развития неустойчивости, число частиц на квазистационарных уровнях растет как $\exp(|\gamma|t)$. Процесс заполнения уровней является ступенчатым. Сначала заполняется уровень $n=2, l=1, m=1$ до тех пор, пока уменьшение момента дыры не выводит это состояние из режима суперрадиации (так как вероятность тунелирования на этот уровень максимальна). Затем начинает заполняться уровень с $l=2, m=2$, который еще является суперрадиантным, одновременно происходит обратное тунеллирование частиц из состояния $l=1, m=1$ в черную дыру, тем самым потеря массы частично компенсируется. Последовательное возбуждение суперрадиантных уровней сопровождается монотонным убыванием вращательного момента дыры, в то время как ее масса практически остается неизменной. Разумеется, такая картина лишь качественно описывает динамику развития суперрадиационной неустойчивости на квазисвязанных уровнях. Поскольку с ростом квантового числа n эффективное время $|\gamma|^{-1}$ процесса быстро растет, для высоколежащих уровней доминирующим будет хокинговский механизм испарения.

Для невращающихся дыр суперрадиационная неустойчивость на квазисвязанных состояниях (в том числе и при учете электрического заряда дыры) не возникает. Хотя для заряженных частиц в поле черной дыры, обладающей электрическим зарядом, и существует эффективная эргосфера, нет квазистационарных состояний, параметры которых соответствовали бы условию суперрадиации $k_+ < 0$. Тепловой механизм заполнения квазистационарных состояний приводит к равновесному (с температурой черной дыры) распределению частиц по уровням [282, 283].

Суперрадиация и квантовые процессы во внешнем магнитном поле

Внешнее однородное магнитное поле вокруг вращающейся черной дыры, как было показано в § 9, создает эффективную разность электростатических потенциалов между горизонтом событий и удаленной точкой. В силу этого порог суперрадиации для заряженных частиц должен смещаться, как это имело бы место для заряженной дыры, порождающей такую же разность потенциалов. С другой стороны, если (невращающаяся) дыра электрически заряжена, то при наличии внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси симметрии, возникает азимутальная компо-

нента вектора Пойнтинга суммарного электромагнитного поля вокруг дыры, которая дает вклад в компоненту $g_{0\varphi}$ метрики. Этот вклад приводит к увлечению систем отсчета и возникновению эффективной эргосферы также и для нейтральных частиц. Рассмотрим каждый из этих эффектов подробнее [279].

Запишем уравнение Клейна—Гордана для заряженной массивной частицы в пространстве-времени Керра—Ньюмена при наличии пробного внешнего однородного магнитного поля напряженности B , выбирая для 4-потенциала поля «кулонову» форму (9.15) ($A_0(r=\infty)=0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \\ - \frac{2a(2Mr - Q^2)}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \varphi} + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \\ - 2ie \Sigma \left[\frac{r(r^2 + a^2)}{\Delta \Sigma} \tilde{Q} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{ar}{\Delta \Sigma} \tilde{Q} + \frac{B}{2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right] + \\ + (e^2 A_\mu A^\mu - \mu^2) \Sigma \psi = 0, \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$\tilde{Q} = Q - 2aMB \quad (63)$$

эффективный заряд и квадрат 4-потенциала равен

$$A_\mu A^\mu = - \frac{B^2 \sin^2 \theta}{4\Sigma} ((r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta) - \tilde{Q} \frac{aB}{\Sigma} r \sin^2 \theta + \frac{\tilde{Q}^2 r^2}{\Delta \Sigma}. \quad (64)$$

Провести полное разделение переменных в уравнении (64) не удастся, однако если магнитное поле достаточно слабое, то можно рассматривать уравнение (62) в области $r < r_0 \gg r_+$, предполагая, что при $r \sim r_0$ пространство-время можно считать плоским, а величину $|eBr_0^2|$ — малой по сравнению с единицей. Поток частиц от черной дыры будем вычислять при $r \sim r_0$, имея в виду, что в более реалистической задаче однородное магнитное поле должно быть сшито с некоторым убывающим полем. Если предположить также, что $|eQ| \ll 1$, то в уравнении (62) можно пренебречь всеми ее членами, квадратичными по B , за исключением члена $(Q - 2aMB)^2/\Delta$, сингулярного на горизонте событий. В этом приближении уравнение (63) допускает разделение переменных $\psi = \exp(-i\omega t + im\varphi) S(\theta) R(r)$, причем угловая функция удовлетворяет (11) при $P = \Lambda = 0$ и эффективной массе частицы

$$\mu^2 = \mu^2 - eBm, \quad (65)$$

а радиальное уравнение имеет вид (13) с эффективным потенциалом (14), в котором нужно положить $P = \Lambda = 0$; $Q = \tilde{Q}$ и $\mu = \mu$.

Асимптотические значения потенциала таковы:

$$\tilde{V}_{\text{eff}} = \begin{cases} \omega^2 - \mu^2 + eBm \equiv \tilde{\kappa}^2, & r \gg r_+, \\ \left[\omega - m\Omega_+ - \frac{e}{2M} (Q - 2aMB) \right]^2 \equiv k_+^2, & r \rightarrow r_+. \end{cases} \quad (66)$$

Добавка eBm в асимптотической области описывает зеемановский сдвиг энергии заряженной частицы в магнитном поле. Добавка члена $-2aMB$ в асимптотическое значение потенциала на горизонте соответствует фарадеевской разности потенциалов, индуцируемой вследствие вращения дыры в магнитном поле.

Вычислив потоки энергии, углового момента и заряда при $r \sim r_0$, получим выражения (28)–(30), в которых следует заме-

нить k_+ на \tilde{k}_+ и Q на \tilde{Q} . Заметим, что последнее слагаемое во второй строчке в (66) обращается в нуль при $Q = 2aMB$. Это означает, что в результате супerrрадиации во внешнем магнитном поле черная дыра может приобрести электрический заряд. Если магнитное поле становится настолько сильным, что вблизи горизонта индуцируемое электрическое поле $2aMB/r_+^2$ имеет порядок швингеровского поля μ^2/e , то вступает в действие электродинамический механизм рождения пар [144]; этот процесс также прекращается после приобретения черной дырой электрического заряда $Q = 2aMB$.

Процессы супerrрадиации и квантовые испарения удается проанализировать и в более реалистическом случае аксиально-симметричного внешнего электромагнитного поля, спадающего на бесконечности. Выберем калибровку так, чтобы $A_\mu = (A_0, 0, 0, A_0)$, причем компоненты A_0, A_φ , зависящие от r и θ , обращаются в нуль при $r \rightarrow \infty$ (на горизонте величины $A_0^+ = A_0(r_+)$) и $A_\varphi^+ = A_\varphi(r_+)$ будут, вообще говоря, конечны). Сингулярность квадрата $A_\mu A^\mu$ на горизонте, как и в случае однородного поля, не приводит к трудностям, так как вклад в эффективный радиальный потенциал оказывается конечным (альтернативный способ состоит в использовании двух различных несингулярных калибровок на горизонте и на бесконечности при одновременном умножении ψ на соответствующий фазовый множитель). Благодаря аксиальной симметрии и стационарности поля можно выделить зависимость от времени и азимутального угла

$$\psi_{\omega m} = \frac{f_{\omega m}(r, \theta)}{(r^2 + a^2)^{1/2}} e^{-i\omega t + im\varphi} \quad (67)$$

и, вводя «черепашую» координату r^* , получить из уравнения Клейна—Гордона в метрике Керра уравнение для $f_{\omega m}(r, \theta)$:

$$\frac{\partial^2 f_{\omega m}}{\partial r^{*2}} + \frac{\Delta}{(r^2 + a^2)^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f_{\omega m}}{\partial \theta} \right) - \omega(r, \theta) f_{\omega m} = 0 \quad (68)$$

с эффективным «потенциалом» $\omega(r, \theta)$, который при сделанных предположениях относительно поведения A_μ имеет асимптотические значения

$$-\omega = \begin{cases} \omega^2 - \mu^2, & r^* \rightarrow \infty, \\ (\omega - m\Omega_+ - e\tilde{V}_+)^2 \equiv p^2, & r^* \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (69)$$

где $\tilde{V}_+ = A_0^+ + \Omega_+ A_\phi^+$ — электростатический потенциал горизонта, который в силу теоремы Картера не зависит от θ .

Поскольку в асимптотических областях $r^* \rightarrow \pm\infty$ функция W не зависит от θ , в них можно разделить переменные, выбрав в качестве функций сфероидальные функции $S_{lm}^{a\omega}(\theta)$. Состояния с фиксированными l, m на горизонте будут переходить в суперпозицию состояний с различными l , но с тем же значением m на бесконечности. Аналогично состояния с заданными l и m на бесконечности будут соответствовать набору состояний с различными l и тем же m на горизонте, поэтому в качестве базисных решений уравнения (68) можно выбрать решения с асимптотиками

$$f_{\omega m}^{\text{in}}(r, \theta) = \begin{cases} (4|\omega^2 - \mu^2|)^{-1/4} S_{lm}^{a\omega}(\theta) (e^{-iV\omega^2 - \mu^2 r} + \sigma_l^{\text{in}} e^{iV\omega^2 - \mu^2 r}), & r^* \rightarrow \infty, \\ |2p|^{-1/2} \sum_{l'} \tau_{ll'}^{\text{in}} S_{l'm}^{a\omega}(\theta) e^{-ipr^*}, & r^* \rightarrow -\infty; \end{cases} \quad (70)$$

$$f_{\omega m}^{\text{up}}(r, \theta) = \begin{cases} (4|\omega^2 - \mu^2|)^{-1/4} \sum_{l'} \tau_{ll'}^{\text{up}} S_{l'm}^{a\omega}(\theta) e^{iV\omega^2 - \mu^2 r}, & r^* \rightarrow \infty, \\ |2p|^{-1/2} S_{lm}^{a\omega}(\theta) (e^{ipr^*} + \sigma_l^{\text{up}} e^{-ipr^*}), & r^* \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (71)$$

Выбранные таким образом моды являются точными решениями уравнения (68) и в области промежуточных r не выражаются в факторизованном виде. Нормировка в (70) и (71) выбрана так, чтобы скалярные произведения (4), построенные из «падающих» волн, имели вид

$$(\psi_{\omega' l' m'}^{\text{in}}, \psi_{\omega l m}^{\text{in}}) = (2\pi)^2 \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'} \frac{\omega}{|\omega^2 - \mu^2|^{1/2}}, \quad (72)$$

$$(\psi_{\omega' l' m'}^{\text{up}}, \psi_{\omega l m}^{\text{up}}) = (2\pi)^2 \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'} \frac{p}{|p|}. \quad (73)$$

Для вычисления потока суперрадиации на бесконечности необходимо найти соотношения, связывающие коэффициенты прохождения и отражения в (70), (71). С этой целью воспользуемся постоянством «интегрального вронскиана»

$$\frac{d}{dr^*} \tilde{W}(f_1, f_2) = 0; \quad \tilde{W} = \int_0^\pi \left(f_1 \frac{df_2}{dr^*} - f_2 \frac{df_1}{dr^*} \right) \sin \theta d\theta \quad (74)$$

для любой пары f_1 и f_2 решений уравнения (68) (для доказательства достаточно, воспользовавшись этим уравнением, проинтегрировать по частям по переменной θ). Поскольку уравнение (68) вещественно, то наряду с (70) и (71) его решениями будут комплексно сопряженные функции. Приравнявая асимптотические значения $\tilde{W}(f^{\text{in}}, f^{\text{in}*})$ и $\tilde{W}(f^{\text{in}}, f^{\text{up}})$, найдем

$$\sum_{l'} \frac{p}{|p|} |\tau_{ll'}^{\text{in}}|^2 = 1 - |\sigma_l^{\text{in}}|^2, \quad (75)$$

$$\frac{p}{|p|} \tau_{ll'}^{\text{in}} = \tau_{ll'}^{\text{up}}. \quad (76)$$

Стандартное вычисление потоков приводит к формуле для скорости потери массы и углового момента дыры вследствие спонтанной суперрадиации

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M}{J} \right) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{l, m} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega \left(\frac{\omega}{m} \right) \sum_{l'} |\tau_{ll'}^{\text{in}}|^2. \quad (77)$$

Порог суперрадиации определяется обращением в нуль величины p и равен

$$\omega_{\max} = m\Omega_+ + e\tilde{V}_+. \quad (78)$$

Таким образом, вывод об изменении граничной частоты суперрадиации для заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле сохраняется и для общего случая аксиально-симметричного (спадающего на бесконечности) поля. Величина \tilde{V}_+ , входящая в (78), представляет собой разность электростатических потенциалов горизонта событий и бесконечно удаленной точки, создаваемую внешним электромагнитным полем.

Аналогичным образом можно рассчитать квантовое испарение во внешнем электромагнитном поле; отличие от известного результата сводится к дополнительному суммированию по второму орбитальному числу

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M}{J} \right) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mu}^{\infty} d\omega \sum_{l, l', m} \frac{|\tau_{ll'}^{\text{in}}|^2}{\exp\left(\frac{2\pi p}{\kappa_+}\right) - 1} \frac{p}{|p|} \left(\frac{\omega}{m} \right). \quad (79)$$

Таким образом, влияние внешнего поля состоит в изменении граничной частоты суперрадиации, а также коэффициента прохождения через потенциальный барьер.

Если внешнее поле допускает существование квазисвязанных состояний в окрестности черной дыры, то возможно суперрадиационное возбуждение некоторых из этих состояний. Так, в случае однородного магнитного поля, удовлетворяющего условию $|eB|r_0^2 \ll 1$, где r_0 — положение минимума потенциальной ψ , получим решение вида (42), в котором нужно положить $r_{++}^{-2} = 0$, $Q = -2aMB$; $\mu = \mu$. Сшивание этого решения с решениями вблизи горизонта событий, проводимое описанным выше способом, приводит снова к формулам (58), (59) для комплексной частоты, где следует сделать ту же замену. В (56) необходимо также заменить k_+ на \tilde{k}_+ . Условием экспоненциального роста числа частиц на квазистационарном уровне ω_n в состоянии с квантовыми числами l, m является отрицательность γ_n , что сводится к условию

$$\omega_n - m\Omega_+ + e a B < 0. \quad (80)$$

При $B=0$ направление «вращения» частиц на неустойчивом уровне совпадает с направлением вращения дыры, то же самое происходит и в магнитном поле для частиц положительного заряда. Порог возбуждения для античастиц ($e < 0$) ниже, в результате должен возникнуть азимутальный ток электрического заряда, направление которого противоположно направлению вращения дыры. Этот ток порождает вторичное магнитное поле, которое частично компенсирует действие внешнего поля B . С другой стороны, черная дыра поглощает преимущественное число частиц с $e > 0$ и заряжается до тех пор, пока заряд Q дыры не станет равным $2aMB$, после чего суперрадиация становится симметричной по знаку заряда рождаемых частиц.

Рассмотрим теперь заряженное скалярное поле около черной дыры Керра—Ньюмена, погруженной в однородное магнитное поле, направленное вдоль оси симметрии, учитывая влияние внешнего поля на метрику пространства-времени. Как отмечалось в § 2, эргосфера соответствующего пространства-времени не исчезает даже при $a=0$. Именно значение функции ω' (2.37) на горизонте событий, имеющее смысл угловой скорости увлечения инерциальных систем отсчета (с точностью до членов, линейных по B), равно

$$\Omega'_+ = \Omega_+ - \frac{2QB r_+}{(r_+^2 + a^2)} \quad (81)$$

(при $a=0$ совпадает с первым слагаемым в (2.54)). Для функции $f_{\omega m}(r, \theta)$, определяемой соотношением (16.67), снова будем иметь уравнение (68) с некоторой новой функцией $\omega'(r, \theta)$. При $r \rightarrow r_+$ эта функция стремится к постоянной, не зависящей от θ

$$-\omega'(r_+) = (\omega - m\Omega'_+ - eV'_+)^2, \quad (82)$$

где электростатический потенциал горизонта равен

$$V_+ = A'_0(r_+) + \Omega'_+ A'_\Phi(r_+), \quad (83)$$

A'_0 и A'_Φ — компоненты вектор-потенциала, генерирующего магнитное поле. Порог суперрадиации теперь определяется обращением в нуль величины (82); интересно, что граничная частота не обращается в нуль даже при $a=0$ и $e=0$, так как параметр Ω_+ согласно (81) остается отличным от нуля. При больших r функция $w'(r, \theta)$ растет (в том числе и для $e=0$), это означает, что частицы не могут уходить на бесконечность. Поэтому суперрадиационная неустойчивость должна приводить к экспоненциальному росту для всех бозонных мод, лежащих ниже порога $\omega < m\Omega'_+ + eV'_+$.

§ 20. МАССИВНОЕ ПОЛЕ СО СПИНОМ 1/2

Уравнение Дирака в искривленном пространстве-времени было записано Фоком и Иваненко еще в 1929 г. [285]. Оно основано на понятии параллельного переноса спиноров с помощью введения спинорной связности в римановом пространстве. Большинство последующих работ основывалось на теории спиноров с характерной двухкомпонентной формой записи уравнений. Это, однако, не обязательно, вся теория может быть сформулирована в четырехкомпонентной форме, более привычной в теории поля в пространстве Минковского. В случае вырожденных метрик по Петрову значительные преимущества дает использование зависящих от координат дираковских матриц, связанных с изотропной тетрадой Ньюмена—Пенроуза. Для метрик типа D оказывается возможным полное разделение переменных в уравнении Дирака как для безмассового, так и для массивного полей. Разделение переменных в уравнении безмассового поля со спином 1/2 в метрике Шварцшильда было проведено в работе Брилла и Уилера [286], этот результат затем был обобщен на метрику Керра Унру [287—288] и Тьюкольским [9]. Чандрасекар [289] решил эту задачу для массивного поля в метрике Керра, затем Пейджем было сделано то же для метрики Керра—Ньюмена [240] (см. также [290, 291]). Обобщение на класс метрик типа D было проведено Гювеном [292]; рассматривался также случай отличной от нуля космологической постоянной [272]. Ниже строится наиболее общий вариант теории Дирака в поле черной дыры, обладающей электрическим и магнитным зарядами и моментом вращения при отличной от нуля космологической постоянной, к которому сводится также случай черной дыры типа Ву—Янга с неабелевыми векторными полями.

Уравнение Дирака в формализме Ньюмена—Пенроуза

Для построения дираковских матриц в искривленном пространстве-времени, с помощью которых «извлекается корень» из

оператора Клейна—Гордона, удобно предварительно ввести тетраду e^μ_a , посредством которой метрика локального пространства η_{ab} , не зависящая от координат, связана с метрикой пространства-времени $g_{\mu\nu}(x)$,

$$g_{\mu\nu}e^\mu_a e^\nu_b = \eta_{ab}; \quad e^\mu_a e^\nu_b \eta^{ab} = g^{\mu\nu}. \quad (1)$$

Метрика η_{ab} не обязательно является метрикой Минковского, достаточно, чтобы ее компоненты были постоянными. В формализме Ньюмена—Пенроуза

$$e^\mu_a = \{l^\mu; n^\mu; m^\mu; m^{*\mu}\}, \quad (2)$$

(индексы a, b пробегает значения 1, 2, 3, 4 для l^μ, n^μ, m^μ и $m^{*\mu}$ соответственно). В этом случае отличными от нуля компонентами η_{ab} будут

$$\eta_{12} = \eta_{21} = -\eta_{34} = -\eta_{43} = 1; \quad \eta_{ab} = \eta^{ab}. \quad (3)$$

Далее строим набор не зависящих от координат матриц Дирака, «расщепляющих» метрику η^{ab} ,

$$\gamma^{(a} \gamma^{b)} = \eta^{ab}, \quad (4)$$

выбирая следующее явное представление:

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= V\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^2 = V\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \gamma^3 &= V\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^4 = V\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что матрицы γ^a при эрмитовом сопряжении переходят друг в друга согласно соотношениям

$$\gamma^{1+} = \gamma^2; \quad \gamma^{3+} = -\gamma^4. \quad (6)$$

Введем теперь зависящее от координат матрицы Дирака

$$\gamma^\mu = e^\mu_a \gamma^a = V\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & n^\mu & -m^{*\mu} \\ 0 & 0 & -m^\mu & l^\mu \\ l^\mu & m^{*\mu} & 0 & 0 \\ m^\mu & n^\mu & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

удовлетворяющие соотношениям антикоммутации

$$1/2 (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \gamma^{(\mu} \gamma^{\nu)} = g^{\mu\nu}. \quad (8)$$

В таком представлении они не эрмитовы и при эрмитовом сопряжении переходят в

$$\gamma^{\mu+} = e_1^\mu \gamma^2 + e_2^\mu \gamma^1 - e_3^\mu \gamma^3 - e_4^\mu \gamma^4. \quad (9)$$

Построим постоянную эрмитову матрицу α , чтобы выполнялось соотношение

$$\alpha \gamma^\mu = \gamma^{\mu+} \alpha, \quad (10)$$

для чего необходимо потребовать $\alpha \gamma_1 = \gamma_2 \alpha$ и $\alpha \gamma_3 = -\gamma_4 \alpha$, $\alpha^2 = I$. Этим условиям удовлетворяет матрица

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Рассмотрим 4-компонентный спинор

$$\Psi = \begin{pmatrix} E \\ F \\ G \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (12)$$

состоящий из непунктирного спинора φ^A и пунктирного спинора χ_A . Определим дираково сопряжение с помощью матрицы α :

$$\bar{\Psi} = \Psi^+ \alpha = (\chi^+, \varphi^+) = (G^*, H^*, E^*, F^*), \quad (13)$$

при этом билинейная форма $\bar{\Psi}_1 \Psi_2$ эрмитова и, кроме того,

$$(\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \Psi_2)^* = \bar{\Psi}_2 \gamma^\mu \Psi_1. \quad (14)$$

Введем матрицу C зарядового сопряжения исходя из требования $C \gamma^\mu = -\gamma^{\mu T} C$, которому удовлетворяет

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Зарядово сопряженный спинор $\psi^C = C \bar{\Psi}^T$ имеет вид

$$\psi^C = \begin{pmatrix} H^* \\ -G^* \\ -F^* \\ E^* \end{pmatrix}. \quad (16)$$

При условии $\psi^C = \psi$ спинор описывает истинно нейтральное фер-

мионное поле (майорановский спинор), в этом случае $E = H^*$; $F = -G^*$.

Помимо матриц γ^μ , обладающих одним векторным индексом (и представляющих собой объект, преобразующийся как вектор в касательном расслоении, и как тензорное произведение $\psi \otimes \bar{\psi}$ в спинорном расслоении), целесообразно ввести псевдоскалярную матрицу

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!} E_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

(последнее равенство очевидно при учете соотношений

$$E_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu n^\nu m^\lambda m^{*\tau} = i, \quad (18)$$

где $E_{\mu\nu\lambda\tau} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$, $\varepsilon_{0123} = 1$), а также тензорную комбинацию

$$\sigma^{\mu\nu} = 1/2 [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (19)$$

При этом имеют место следующие соотношения дуальности:

$$1/2 E_{\mu\nu\lambda\tau} \sigma^{\mu\nu} = -i \gamma^5 \sigma_{\lambda\tau}; \quad (20)$$

$$E_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda = 6i \gamma^5 \gamma_\tau. \quad (21)$$

Собственные значения оператора γ^5 (киральности) равны ± 1 , соответствующие правые и левые спиноры таковы:

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}; \quad \gamma^5 \psi_R = -\psi_R; \quad \gamma^5 \psi_L = \psi_L. \quad (22)$$

Все предшествовавшее относилось к фиксированной пространственно-временной точке. Теперь необходимо ввести представление о параллельном переносе спиноров. Вводимая спинорная связность должна быть согласована со связностью в векторном расслоении таким образом, чтобы образованные из компонент спиноров объекты, обладающие нулевой спинорной валентностью и ненулевой тензорной валентностью, преобразовывались бы с помощью обычных символов Кристоффеля. Этому требованию удовлетворяют коэффициенты Фока-Иваненко [285], задающие спинорную ковариантную производную

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \Gamma_\mu \psi. \quad (23)$$

Коэффициенты Γ_μ выражаются через ковариантные производные от векторов тетрады в виде

$$\Gamma_\mu = 1/4 e_{\nu a} e^{\nu b}_{;\mu} \gamma^a \gamma^b = 1/4 \gamma^\nu_{;\mu} \gamma_\nu \quad (24)$$

(в последней форме записи под $\gamma^{\nu}_{;\mu}$ понимается

$$\gamma^{\nu}_{;\mu} = \gamma^{\nu}_{,\mu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \gamma^{\lambda}; \quad (25)$$

эту производную следует отличать от истинной ковариантной производной γ -матриц (как спин-тензоров), которая будет определена ниже). Нетрудно проверить, что введенная выше матрица дираковского сопряжения α удовлетворяет соотношению

$$\Gamma^{\dagger}_{\mu} \alpha + \alpha \Gamma_{\mu} = 0, \quad (26)$$

в силу которого ковариантная производная от сопряженного спинора имеет вид

$$\nabla_{\mu} \bar{\psi} = \partial_{\mu} \bar{\psi} + \bar{\psi} \Gamma_{\mu}. \quad (27)$$

Ковариантные производные от спинорных величин более высокой валентности вводятся на основании правила почленного дифференцирования тензорных произведений

$$\nabla_{\mu} \psi_1 \otimes \bar{\psi}_2 = (\nabla_{\mu} \psi_1) \otimes \bar{\psi}_2 + \psi_1 \otimes \nabla_{\mu} \bar{\psi}_2. \quad (28)$$

Ковариантное дифференцирование спин-тензоров, обладающих тензорной валентностью, дополнительно включает аффинную связность, например

$$\nabla_{\mu} \psi^{\nu} = \partial_{\mu} \psi^{\nu} - \Gamma_{\mu} \psi^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \psi^{\lambda}. \quad (29)$$

В частности, для самих дираковских матриц γ^{μ} полная ковариантная производная должна иметь вид

$$\nabla_{\nu} \gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}_{;\nu} - \Gamma_{\nu} \gamma^{\mu} + \gamma^{\mu} \Gamma_{\nu}, \quad (30)$$

как для векторов в тензорном расслоении и объектов типа $\psi \otimes \bar{\psi}$ в спинорном расслоении. Подставляя сюда (25) и (24), нетрудно убедиться, что

$$\nabla_{\nu} \gamma^{\mu} \equiv 0, \quad (31)$$

чего и следовало ожидать для связности, согласованной с метрикой, учитывая соотношение (18). В дальнейшем символом ∇_{μ} будет всегда обозначаться полная ковариантная производная от спин-тензоров произвольной валентности, включающая как аффинную, так и спинорную связности. При этом ковариантное дифференцирование произведений объектов различной тензорной и спинорной валентности должно производиться почленно. В соотношении

$$\nabla_{\nu} (\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi) = (\nabla_{\nu} \bar{\psi}) \gamma^{\mu} \psi + \bar{\psi} (\nabla_{\nu} \gamma^{\mu}) \psi + \bar{\psi} \gamma^{\mu} (\nabla_{\nu} \psi) = \partial_{\nu} (\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi) + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} (\bar{\psi} \gamma^{\lambda} \psi) \quad (32)$$

под $(\nabla_{\nu} \bar{\psi})$ следует понимать (27), под $\nabla_{\nu} \psi$ — (23) и под $\nabla_{\nu} \gamma^{\mu}$ — (30), в

результатирующем выражении спинорные связности сокращаются, и мы получаем, как и следовало ожидать, ковариантную производную от вектора.

Аналогичным образом можно ввести производную Ли от спиноров вдоль векторного поля Киллинга k_μ , согласованную с векторной производной Ли [288]. Производная Ли от 4-компонентного спинора $\mathcal{L}_k \psi$ вдоль векторного поля k^μ и превращает его в спинор той же валентности

$$\mathcal{L}_k \psi = k^\mu \nabla_\mu \psi - 1/2 \sigma^{\mu\nu} k_{\mu;\nu} \psi; \quad (33)$$

при этом для сопряженного спинора будем иметь

$$\mathcal{L}_k \bar{\psi} = k^\mu \nabla_\mu \bar{\psi} + 1/2 \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} k_{\mu;\nu}. \quad (34)$$

Производные Ли от величин более высокой валентности в спинорном пространстве получаются из предположения о почленном дифференцировании тензорных произведений

$$\mathcal{L}_k (\psi_1 \otimes \bar{\psi}_2) = (\mathcal{L}_k \psi_1) \otimes \bar{\psi}_2 + \psi_1 \otimes \mathcal{L}_k \bar{\psi}_2, \quad (35)$$

а при наличии дополнительных тензорных индексов необходимо ввести члены, входящие в производные Ли от соответствующих тензоров. В результате для матриц γ будем иметь

$$\mathcal{L}_k \gamma^\mu = -\gamma^\nu k^\mu_{;\nu} + k^\nu \nabla_\nu \gamma^\mu - 1/2 [\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] k_{\alpha;\beta}, \quad (36)$$

что с учетом коммутационного соотношения

$$1/2 [\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] = g^{\mu[\beta} \gamma^{\alpha]} \quad (37)$$

даст

$$\mathcal{L}_k \gamma^\mu = -1/2 \gamma^\nu (k^\mu_{;\nu} + k^\mu_{\nu}) = 0. \quad (38)$$

Аналогично для матриц Дирака с нижним индексом получим

$$\mathcal{L}_k \gamma_\mu = 1/2 \gamma^\nu (k_{\mu;\nu} + k_{\nu;\mu}) = 0. \quad (39)$$

Нетрудно убедиться в том, что величина $(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$ дифференцируется по Ли как вектор

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) &= (\mathcal{L}_k \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} (\mathcal{L}_k \gamma^\mu) \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (\mathcal{L}_k \psi) = \\ &= k^\nu \nabla_\nu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi) k^\mu_{;\nu}; \end{aligned} \quad (40)$$

при этом спинорные члены, пропорциональные матрицам $\sigma^{\alpha\beta}$, сокращаются. Аналогично можно показать, что величина $(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)$ дифференцируется как 1-форма, $(\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi)$ — как тензор второго ранга и т. д.

После этой предварительной подготовки мы можем записать действие для дираковского поля в искривленном пространстве

времени (предполагая спинорное поле заряженным и включая также электромагнитное поле) с помощью минимального ковариантного обобщения действия в пространстве—времени Минковского

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x; \quad \mathcal{L} = i/2 (\bar{\psi} \gamma^\mu \overset{\circ}{\nabla}_\mu \psi - (\overset{\circ}{\nabla}_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) - \bar{\mu} \psi, \quad (41)$$

где символом

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu = \nabla_\mu + ie A_\mu \quad (42)$$

обозначена «удлиненная» ковариантная производная. Варьируя действие (42), получаем уравнение Дирака

$$(i \gamma^\mu \overset{\circ}{\nabla}_\mu - \mu) \psi = 0, \quad (43)$$

а также уравнение для сопряженного спинора

$$i (\overset{\circ}{\nabla}_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu + \bar{\mu} \bar{\psi} = 0. \quad (44)$$

Воспользовавшись определениями спиновых коэффициентов (I.56), представим входящие в (25) ковариантные производные от компонент матриц (7) в виде разложения по векторам изотропной тетрады, в результате находим следующее явное выражение коэффициентов спинорной связности:

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} P_\mu & 0 \\ 0 & -P_\mu^+ \end{pmatrix}, \quad P_\mu = \begin{pmatrix} -a_\mu & b_\mu \\ c_\mu & a_\mu \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где введены векторы

$$a_\mu = \gamma l_\mu - \alpha n_\mu - \beta m_\mu^*; \quad b_\mu = \mu m_\mu^* - \pi n_\mu; \quad c_\mu = \tau l_\mu - \rho m_\mu. \quad (46)$$

Свертывая оператор удлиненной ковариантной производной с матрицами γ , для $\hat{\nabla} = \gamma^\mu \overset{\circ}{\nabla}_\mu$ имеем

$$\hat{\nabla} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta - \gamma^* + \mu^* + ie A_n - (\delta^* + \beta^* - \tau^* + ie A_{m^*}) \\ 0 & 0 & -(\delta + \beta + ie A_m) & D - \rho^* + ie A_l \\ D - \rho + ie A_l & \delta^* + \beta^* + ie A_{m^*} & 0 & 0 \\ \delta + \beta - \tau + ie A_m & \Delta + \mu - \gamma + ie A_n & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Интегралы движения

Из симметрии действия (41) относительно преобразования фазы $\psi \rightarrow e^{i\varphi} \psi$ следует закон сохранения векторного тока:

$$J^\mu{}_{;\mu} = 0; \quad J^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (48)$$

Явное выражение для вектора тока в терминах разложения по векторам изотропной тетрады таково:

$$J^\mu = \sqrt{2} [l^\mu (|E|^2 + |H|^2) + n^\mu (|F|^2 + |G|^2) - m^\mu (EF^* - GH^*) - m^{*\mu} (E^*F - G^*H)]. \quad (49)$$

В случае поля нулевой массы, действие (41) инвариантно также относительно кирального поворота $\psi \rightarrow e^{i\varphi\gamma^5}\psi$, что приводит к сохранению аксиального тока

$$J^{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi. \quad (50)$$

При $\mu \neq 0$ из уравнений (43), (44) находим следующее выражение для дивергенции аксиального тока:

$$J^{\mu 5}_{;\mu} = 2i\mu J^5; \quad J^5 = \bar{\psi}\gamma^5\psi. \quad (51)$$

Как известно, при учете взаимодействия спинорного поля с электромагнитным и гравитационным в правой части (51) появляются квантовые поправки, выражающиеся через псевдоскалярные инварианты электромагнитного и гравитационного полей [293—297] (аксиальные аномалии). Существование аксиальных аномалий приводит к нетривиальным эффектам в рождении фермионов даяконами (см. ниже).

Варьируя лагранжиан (42) по метрике, получаем выражение для тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = i/2 (\bar{\psi}\gamma_{(\mu}\nabla_{\nu)}\psi - \overline{(\nabla_{(\mu}\psi)\gamma_{\nu)}\psi}), \quad (52)$$

удовлетворяющего условию

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = F_{\mu\nu}J^\nu \quad (53)$$

и имеющего след

$$T^\mu_\mu = \mu \bar{\psi}\psi. \quad (54)$$

Нетрудно проверить, что для каждого векторного поля Киллинга можно построить сохраняющийся ток

$$P^\mu = \xi^\nu (T^\mu_\nu + A_\nu J^\mu). \quad (55)$$

Приведем также явное выражение для тензора энергии-импульса в терминах разложения по векторам изотропной тетрады $T_{\mu\nu} = t_{(\mu\nu)} + \text{к.с.}$:

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} = & \frac{i}{\sqrt{2}} [(H^*H_{,\mu} - EE^*_{,\mu})l_\nu + (G^*G_{,\mu} - FF^*_{,\mu})n_\mu + \\ & + (F^*E_{,\mu} - GH^*_{,\mu})m_\mu + (E^*F_{,\mu} + HG^*_{,\mu})m_\nu^* + \\ & + (|E|^2 - |H|^2)(l_\mu a_\nu + c_\mu^* m_\nu) + (|G|^2 - |F|^2)(n_\mu a_\nu + b_\mu m_\nu) + \end{aligned}$$

$$+ (H^*G + EF^*) (m_\mu (a_\nu + a_\nu^*) + l_\mu b_\nu^* - n_\mu c_\nu)] - \\ - \frac{eA_\mu}{\sqrt{2}} [(|H|^2 + |E|^2) l_\nu - (|F|^2 + |G|^2) n_\nu + 2(EF^* - H^*G) m_\nu]. \quad (56)$$

Для разделения переменных в уравнении Дирака (43) необходимо построить набор матричных операторов, коммутирующих с оператором (47). Покажем, что в число таких операторов можно включить спинорные производные Ли (33) вдоль векторных полей Киллинга. Заметим предварительно, что если ξ^μ — вектор Киллинга, то из (38) следует

$$\mathcal{L}_\xi \gamma^\mu = 0. \quad (57)$$

Рассмотрим теперь коммутатор $[\mathcal{L}_\xi, \nabla_\mu]$ на множестве дираковских спиноров. Учитывая уравнения Киллинга и ковариантное постоянство матриц γ^μ , находим

$$[\mathcal{L}_\xi, \nabla_\mu] = \xi^\nu [\nabla_\nu, \nabla_\mu] + 1/2 \sigma^{\alpha\beta} \xi_{\alpha;\beta;\mu}. \quad (58)$$

Коммутатор двух спинорных ковариантных производных применительно к дираковским спинорам выражается через тензор Римана в виде

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = 1/2 R_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}. \quad (59)$$

Далее, используя уравнения Киллинга для ξ^μ , можно показать

$$\xi_{\alpha;\beta;\mu} \sigma^{\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \xi^\nu \sigma^{\alpha\beta}. \quad (60)$$

Подставляя (59) и (60) в (58), нетрудно убедиться что рассматриваемый коммутатор равен нулю. В результате для удлиненной спинорной ковариантной производной, свернутой с матрицей Дирака, получаем следующий коммутатор с производной Ли вдоль векторного поля Киллинга:

$$[\mathcal{L}_\xi, \gamma^\mu \overset{\circ}{\nabla}_\mu] = ie \gamma^\mu \mathcal{L}_\xi A_\nu, \quad (61)$$

который обращается в нуль, если электромагнитное поле постоянно в смысле переноса Ли вдоль поля Киллинга (что имеет место в нашем случае согласно (1.11)). Итак в нашем распоряжении имеются два оператора, коммутирующих с оператором Дирака и имеющих, следовательно, общие с ним собственные функции. Третий недостающий оператор можно построить, если пространство-время допускает тензорное поле Яно—Киллинга (1.31). С помощью антисимметричного тензора можно построить матричный оператор первого порядка по удлиненной ковариантной производной:

$$K = f^{\mu\nu} \gamma^5 \gamma_\mu \overset{\circ}{\nabla}_\nu, \quad (62)$$

коммутатор которого с оператором Дирака (47) равен

$$[K, \gamma^\mu \nabla_\mu] = f^{\mu\nu\lambda} \gamma^5 \gamma_\nu \gamma_\lambda \nabla_\mu. \quad (63)$$

Добавляя к оператору (62) член без производной так, чтобы его коммутатор с оператором Дирака компенсировал выражение (63), и выбирая общий коэффициент из условия самосопряженности, получаем следующий оператор, коммутирующий с (47):

$$Q = i\gamma^5 f^{\mu\nu} \gamma_\nu \nabla_\mu + 1/3 \gamma_\nu f^{\mu\nu}_{;\mu}, \quad (64)$$

где $f_{\mu\nu} = 1/2 E_{\mu\nu\lambda\tau} f^{\lambda\tau}$ — дуальный тензор Яно—Киллинга. Этот интеграл был впервые указан в работе [298] (см. также [299], где построены интегралы движения более общего вида).

Покажем, что для метрики, не зависящей от координат вдоль направлений, задаваемых векторным полем ξ^μ (в этом случае контравариантные компоненты поля ξ^μ постоянны), производные Ли (33) превращаются в операторы частного дифференцирования вдоль ξ^μ (умноженные на единичную матрицу). Для этого выделим в (33) частную производную и подставим явное выражение (24) для спинорной связности, а затем преобразуем второй член в (33) с учетом уравнений Киллинга для ξ^μ

$$\mathcal{L}_\xi = \xi^\mu \partial_\mu - 1/4 (g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} + \gamma_{;\mu}^\alpha \gamma_\alpha) \xi^\mu - 1/4 \gamma_\mu \gamma^{\alpha\xi}_{;\alpha}. \quad (65)$$

В случае если компоненты ξ^μ не зависят от координат и метрика не зависит от координат вдоль ξ^μ , в этой формуле отлично от нуля лишь первое слагаемое, что и доказывает утверждение.

Получение явного выражения оператора Q (64) для случая рассматриваемой метрики требует громоздких вычислений. Результат имеет вид

$$Q = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & Q_1 \\ Q_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -ia \cos \theta (\Delta - \gamma^* + \mu^* + ieA_n); & -r(\delta^* + \beta^* - \tau^* + ieA_m^*) \\ r(\delta + \beta + ieA_m); & ia \cos \theta (D - \rho^* + ieA_l) \end{pmatrix};$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} -ia \cos \theta (D - \rho + ieA_l); & -r(\delta^* + \beta^* + ieA_m^*) \\ r(\delta + \beta - \tau + ieA_m); & ia \cos \theta (\Delta + \mu - \gamma + ieA_m) \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Разделение переменных

Уравнение Дирака (43) можно рассматривать как уравнение на собственные функции для оператора (47), принадлежащие собственному значению $-i\mu$. Потребуем, чтобы эти функции одновременно были собственными для коммутирующего с ним оператора (66)

$$Q\psi = \hat{\lambda}\psi, \quad (67)$$

где через $\hat{\lambda}$ обозначены собственные значения, физический смысл которых выяснится ниже. Построим линейную комбинацию операторов (47) и (66)

$$N_1 = \beta_1 (Q - \hat{\lambda}) - r\hat{\nabla}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (68)$$

где σ_3 — матрица Паули. Подставляя сюда явные выражения (47) и (66), нетрудно убедиться в том, что все операторы δ и δ^* в ней взаимно уничтожаются и результирующая система уравнений $N_1\psi = i\mu r\psi$ содержит только радиальные операторы:

$$\begin{aligned} (D - \rho + ieA_l) E &= \rho/\sqrt{2} \cdot (i\mu r - \hat{\lambda}) G, \\ (\Delta + \mu - \gamma + ieA_n) F &= \rho/\sqrt{2} \cdot (i\mu r + \hat{\lambda}) H, \\ (\Delta - \gamma^* + \mu^* + ieA_n) G &= \rho^*/\sqrt{2} \cdot (i\mu r + \hat{\lambda}) E, \\ (D - \rho^* + ieA_l) H &= \rho^*/\sqrt{2} \cdot (i\mu r - \hat{\lambda}) F. \end{aligned} \quad (69)$$

Аналогичным образом можно построить комбинацию операторов (47) и (66), не содержащую радиальных операторов

$$N_2 = \beta_2 (Q - \hat{\lambda}) + ia \cos \theta \hat{\nabla}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Результирующая система уравнений для компонент дираковского спинора ψ имеет вид

$$\begin{aligned} (\delta^* + \beta^* - \tau + ieA_m) H &= \rho^*/\sqrt{2} \cdot (\hat{\lambda} + \mu a \cos \theta) E, \\ (\delta + \beta + ieA_m) G &= \rho^*/\sqrt{2} \cdot (-\hat{\lambda} + \mu a \cos \theta) F, \\ (\delta^* + \beta^* + ieA_m) F &= \rho/\sqrt{2} \cdot (\hat{\lambda} + \mu a \cos \theta) G, \\ (\delta + \beta - \tau + ieA_m) E &= \rho/\sqrt{2} \cdot (-\hat{\lambda} + \mu a \cos \theta) H. \end{aligned} \quad (71)$$

Учитывая, что производные Ли вдоль полей Киллинга имеют в качестве собственных функций $\exp(-i\omega t + im\varphi)$, ищем решение системы из восьми уравнений (69), (71) в виде

$$\begin{aligned} E &= -\rho/\sqrt{2} S_E(\theta) R_E(r) e^{-i\omega t + im\varphi}, \quad F = 1/\sqrt{\Delta_r} S_F(\theta) R_F(r) e^{-i\omega t + im\varphi}, \\ G &= -1/\sqrt{\Delta_r} S_G(\theta) R_G(r) e^{-i\omega t + im\varphi}, \quad H = \rho^*/\sqrt{2} S_H(\theta) R_H(r) e^{-i\omega t + im\varphi}. \end{aligned} \quad (72)$$

Из системы радиальных уравнений (69) получаем два уравнения для R и R' , причем $R = R_E$; $R' = R_G$; $S_E = S_G$; $S_F = S_H$:

$$-\sqrt{\Delta_r} \mathcal{D}_0^+ R' = (\hat{\lambda} + i\mu r) R, \quad \sqrt{\Delta_r} \mathcal{D}_0 R = (-\hat{\lambda} + i\mu r) R' \quad (73)$$

и точно такую же систему для $R_H=R$ и $R_F=R'$. Аналогично из системы угловых уравнений (71) получаем уравнения для пары S, S' , причем $S=S_F$, $S'=S_E$, $R_H=R_E$, $R_G=R_F$,

$$\sqrt{\Delta_0} \hat{\mathcal{L}}_{1/2} S = (\hat{\lambda} + \mu a \cos \theta) S', \quad -\sqrt{\Delta_0} \hat{\mathcal{L}}_{1/2}^+ S' = (\hat{\lambda} - \mu a \cos \theta) S \quad (74)$$

и точно такую же систему для $S_H=S$ и $S_G=S'$. В формулах (73), (74) операторы определены согласно (19.10). Итак, мы приходим к следующим соотношениям между радиальными и угловыми частями компонент спинора:

$$R \equiv R_E = R_H, \quad R' \equiv R_G = R_F, \quad S \equiv S_F = S_H, \quad S' \equiv S_G = S_E. \quad (75)$$

Именно такие соотношения были предложены *ad hoc* Чандрасекаром [289, 2] и использованы в последующих работах [290—292] для разделения переменных. Проведенный анализ раскрывает смысл анзаца Чандрасекара и дает интерпретацию константы разделения $\hat{\lambda}$ как собственного значения оператора (66) (по этому поводу см. также [300]).

При $a=0$ система угловых уравнений сводится к уравнениям (Д.7), (Д.8) для спиновых сферических функций. С другой стороны, если $eP=0$, то разделение переменных можно осуществить с помощью шаровых спиноров, характеризующихся значениями орбитального момента l , полного момента $j=l \pm 1/2$ и его проекции m . Сравнение показывает, что между $\hat{\lambda}$ и j имеет место соотношение

$$\hat{\lambda} = j(j+1) - l(l+1) + 1/4, \quad (76)$$

причем случай $j=l+1/2$ отвечает положительным $\hat{\lambda}=l+1$, $l=0, 1, 2, \dots$, а случай $j=l-1/2$ — отрицательным $\hat{\lambda}=-l$, $l=1, 2, \dots$. Соответствующие функции таковы: $S_{\lambda} = {}_{1/2}S_{jm}$, $S'_{\lambda} = \text{sign } \hat{\lambda} - {}_{1/2}S_{jm}$.

Записывая системы уравнений вида (74) для собственных значений $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ и умножая каждое из них на угловую функцию с другим собственным значением, после некоторых преобразований получаем соотношение

$$\begin{aligned} & (\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2) \int_0^\pi (S_{\lambda_1} S_{\lambda_2} + S'_{\lambda_1} S'_{\lambda_2}) \sin \theta d\theta = \\ & = \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} [V \sqrt{\Delta_0} \sin \theta (S_{\lambda_1} S'_{\lambda_2} - S'_{\lambda_1} S_{\lambda_2})] d\theta = 0, \end{aligned} \quad (77)$$

в котором равенство нулю следует из условия регулярности функций на границах интегрирования. Отсюда следует, что двухкомпонентные функции

$$Z_{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} S_{\lambda} \\ S'_{\lambda} \end{pmatrix} \quad (78)$$

можно выбрать ортонормированными в смысле скалярного произведения

$$(Z_{\lambda_1}, Z_{\lambda_2}) = \oint Z_{\lambda_1}^{\dagger} Z_{\lambda_2} d\Omega = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (79)$$

При отсутствии магнитного заряда $eP=0$ система уравнений (74) симметрична относительно инверсии координат $\theta \rightarrow \pi - \theta$:

оператор $\tilde{\mathcal{L}}_{1/2}$ при этом переходит в $-\tilde{\mathcal{L}}_{1/2}^{\dagger}$, и мы получаем ту же самую систему с заменой $S \leftrightarrow S'$. Таким образом, $S(\pi - \theta) = CS'(\theta)$, где C — некоторая постоянная. Для $\Lambda=0$, $eP=0$ система (74) сводится к рассмотренной Чандрасекаром [289], более подробный анализ был дан в работах [301—302]. При $\mu=0$ ее решениями будут спинные сфероидальные функции со спиновым весом $\pm 1/2$. В случае $a=\Lambda=0$, $\mu \neq 0$, $eP \neq 0$ получим спинные сферические гармоники.

Обратимся теперь к системе радиальных уравнений (73). Нетрудно показать, что для любой пары решений $\mathcal{R}_1 = \{R_1, R'_1\}$ и $\mathcal{R}_2 = \{R_2, R'_2\}$ этой системы является постоянным вронскиан — определитель вида

$$W(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \equiv \begin{vmatrix} R_1 & R'_1 \\ R_2 & R'_2 \end{vmatrix} = R_1 R'_2 - R_2 R'_1, \quad \frac{dW}{dr} = 0 \quad (80)$$

(штрих здесь не обозначает производные!). Поскольку при комплексном сопряжении уравнения системы (73) переходят друг в друга, то каждой паре решений $\mathcal{R} = \{R, R'\}$ соответствует также пара $\mathcal{R}^{\dagger} = \{R'^*, R\}$. Поэтому не зависящим от координаты r будет также вронскиан

$$W(\mathcal{R}, \mathcal{R}^{\dagger}) = |R|^2 - |R'|^2. \quad (81)$$

Исключив из системы (73) функцию R' , получим уравнение второго порядка для R

$$(\tilde{\mathcal{D}}_{1/2}^{\dagger} \tilde{\mathcal{D}}_0 - (r + i \frac{\hat{\lambda}}{\mu})^{-1} \tilde{\mathcal{D}}_0 - \Delta_r^{-1} (\hat{\lambda}^2 + \mu^2 r^2)) R = 0, \quad (82)$$

совпадающее по форме с уравнением Чандрасекара [289]. Входящие в это уравнение операторы имеют, однако, более общий вид и переходят в операторы Чандрасекара лишь при $\Lambda=0$, $eP=0$.

Квантовое рождение частиц

Для проведения вторичного квантования необходимо построить полную систему классических решений с заданными гра-

ничными условиями. Рассмотрим сначала асимптотическое поведение радиальных функций R и R' на горизонтах событий. Вводя черепашую координату $dr^* = (r^2 + a^2) dr / \Delta_r$, нетрудно показать, что при $r^* \rightarrow \mp \infty$

$$\Delta_r \mathring{\mathcal{D}}_0 \simeq \partial / \partial r^* - ik_H, \quad \Delta_r \mathring{\mathcal{D}}_0^+ \simeq \partial / \partial r^* + ik_H. \quad (83)$$

Как видно из (73), (83), вблизи горизонтов

$$R \sim \exp(ik_H r^*); \quad R' \sim \exp(-ik_H r^*), \quad (84)$$

т. е. R описывает волну, выходящую из-под горизонта событий черной дыры и уходящую за космологический горизонт, а R' — выходящую из-за космологического горизонта и поглощаемую черной дырой. Такое поведение характерно как для безмассовых, так и массивных частиц (на горизонтах частицы эффективно становятся безмассовыми). Заметим, что коэффициенты перед экспонентами в (84) не связаны между собой.

В промежуточной области $\mathcal{D}(r_+ \ll r \ll r_{++}, \mu r \gg |\hat{\lambda}|)$ получаем простую систему

$$\bar{\omega} = I\omega; \quad \frac{\partial R}{\partial r} - i\bar{\omega}R = i\mu R', \quad \frac{\partial R'}{\partial r} + i\bar{\omega}R' = -i\mu R, \quad (85)$$

общее решение которой имеет вид

$$R = \alpha e^{i\kappa r} + \beta e^{-i\kappa r}, \quad R' = \frac{\kappa - \bar{\omega}}{\mu} \alpha e^{i\kappa r} - \frac{\kappa + \bar{\omega}}{\mu} \beta e^{-i\kappa r}, \quad (86)$$

где $\kappa = (\bar{\omega}^2 - \mu^2)^{1/2}$; α и β — произвольные постоянные.

Введем два линейно независимых решения $\mathcal{R}^{(+)} = \{R^{(+)}, R'^{(+)}\}$ и $\mathcal{R}^{(++)} = \{R^{(++)}, R'^{(++)}\}$ системы (73) таким образом, чтобы $\mathcal{R}^{(+)}$ описывало «чистую» падающую волну на горизонте черной дыры, а $\mathcal{R}^{(++)}$ — волну, уходящую за космологический горизонт. Тогда первое решение вблизи космологического горизонта будет содержать как волну, распространяющуюся в направлении к черной дыре (падающую волну), так и волну в обратном направлении (отраженную), соответственно второе решение будет содержать вблизи горизонта событий черной дыры волну, движущуюся в направлении космологического горизонта (падающую) и обратно (отраженную). Выберем нормировку так, чтобы в обоих случаях падающие волны входили с единичным коэффициентом. Учитывая соотношения (86) в промежуточной области, а также постоянство вронскиана $W(\mathcal{R}^{(+)}, \mathcal{R}^{(++)})$, можем написать

$$\mathcal{R}^{(+)} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \tau e^{-ik_+ r^*}, \quad r^* \rightarrow -\infty, \\ \frac{\mu}{\kappa - \bar{\omega}} \gamma e^{i\kappa r} - \frac{\mu}{\kappa + \bar{\omega}} \delta e^{-i\kappa r}, & \gamma e^{i\kappa r} + \delta e^{-i\kappa r}, \quad r \in \mathcal{D}, \\ \sigma e^{ik_{++} r^*}, & e^{-ik_{++} r^*}, \quad r^* \rightarrow \infty; \end{array} \right\}$$

$$\frac{1}{\tau} \mathcal{R}^{(++)} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\tau} e^{ik_+ \tau^*}, & - \left(\frac{\sigma}{\tau} \right)^* e^{-ik_+ r^*}, \quad r^* \rightarrow -\infty, \\ \frac{\mu}{\kappa - \omega} a e^{i\kappa r} - \frac{\mu \beta}{\kappa + \omega} e^{-i\kappa r}, & a e^{i\kappa r} + \beta e^{-i\kappa r}, \quad r \in \mathcal{D}, \\ e^{ik_{++} r^*}, & 0, \quad r^* \rightarrow \infty. \end{array} \right\} \quad (87)$$

Приравнявая асимптотические значения вронскиана $W(\mathcal{R}^{(+)}, \mathcal{R}^{(++)})$, находим соотношение между полным коэффициентом прохождения τ и коэффициентом отражения σ

$$|\tau|^2 + |\sigma|^2 = 1, \quad (88)$$

выражающее собой сохранение потока вероятности. В отличие от случая скалярного поля коэффициент при $|\tau|^2$ всегда положителен и при $k_H < 0$, т. е. усиления волн при отражении от дыры не происходит. Заметим, что отсутствие суперрадиации для дираковского поля является следствием классических уравнений поля вне видимой связи со статикой Ферми—Дирака, заведомо исключающей возможность индуцированных процессов (каковым является эффект усиления волн целочисленного спина при отражении от вращающейся черной дыры в режиме суперрадиации $k_H < 0$). С другой стороны, как впервые указал Бекенштейн [303], при выполнении соотношения $dI/d\mathcal{E} = m/\omega$ между проекцией момента количества движения dI на ось симметрии и $d\mathcal{E}$ энергией парциальной волны условие суперрадиации $d\mathcal{E} < 0$ при $k_+ < 0$ с необходимостью следует из теоремы Хокинга о неубывании площади поверхности горизонта событий $d\mathcal{A} \geq 0$, что очевидно из (1.27). Поскольку неравенство $d\mathcal{A} \geq 0$ следует из условия положительности энергии, отсутствие суперрадиации для классического фермионного поля должно означать, что классическая плотность энергии этого поля вблизи горизонта событий отрицательна. Подстановка асимптотик (87) в соответствующие компоненты тензора энергии-импульса (57) действительно подтверждает эти соображения (см. также [2, 288, 304]).

Приравнявая далее асимптотические значения вронскианов $W(\mathcal{R}^{(++)\dagger}, \mathcal{R}^{(++)})$ и $W(\mathcal{R}^{(++)\dagger}, \mathcal{R}^{(++)})$, находим следующие соотношения между коэффициентами в (87):

$$\begin{aligned} |\beta|^2 (\bar{\omega} - \kappa) - |\alpha|^2 (\bar{\omega} + \kappa) &= |\delta|^2 (\bar{\omega} - \kappa) - |\gamma|^2 (\bar{\omega} + \kappa) = \\ &= \mu (\gamma \beta - \alpha \delta) = \sigma^{-1} [\gamma \alpha^* (\bar{\omega} + \kappa) - \delta \beta^* (\bar{\omega} - \kappa)] = \mu^2 / 2\kappa, \end{aligned} \quad (89)$$

выражающие связь между потоками в промежуточной области и вблизи горизонтов событий.

Введем в пространстве решений уравнения Дирака скалярное произведение

$$(\psi_1, \psi_2) = \int \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 d\Sigma_\mu = \int \bar{\psi}_1 \gamma^0 \psi_2 \sqrt{-g} d^3x, \quad (90)$$

где Σ — некоторая пространственно-подобная гиперповерхность, в качестве которой удобно взять гиперповерхность, ортогональную t . Построим базисные функции $\psi_{\omega m \lambda}^{(+)}$ и $\psi_{\omega m \lambda}^{(++)}$, подставляя в (12) разложения (72) с учетом тождеств (75), используя угловые функции, нормированные согласно (79) и радиальные функции с асимптотиками (87). Умножая их дополнительно на $1/\pi\sqrt{2}$, получим моды, нормированные условием

$$(\psi_\alpha^{(+)}, \psi_\alpha^{(+)}) = (\psi_\alpha^{(++)}, \psi_\alpha^{(++)}) = \delta(\omega - \omega') \delta_{mm'} \delta_{\hat{\lambda}\hat{\lambda}'}; \quad \alpha = \{\omega, m, \hat{\lambda}\}, \quad (91)$$

где, как и в скалярном случае, нормировочные интегралы вычисляются с учетом лишь падающих волн для каждого из состояний двух типов (широкие волновые пакеты в областях Коши).

Чтобы провести вторичное квантование фермионного поля, необходимо условиться о выборе положительно-частотных мод. Выбор в качестве положительно-частотных тех решений, которые аналитичны в нижней полуплоскости комплексного времени t , ведет к системе операторов рождения и уничтожения $a', a'^{\dagger}, b', b'^{\dagger}; c', c'^{\dagger}, d', d'^{\dagger}$:

$$\Psi = \sum_{m, \hat{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} [\theta(k_+) (\psi_\alpha^{(++)} a'_\alpha + \psi_\alpha^{(++)*} b'^{\dagger}_\alpha) + \theta(k_{++}) (\psi_\alpha^{(+)} c'_\alpha + \psi_\alpha^{(+)*} d'^{\dagger}_\alpha)] d\omega \quad (92)$$

и вакууму Бульвара (19.21). Если же в качестве положительно-частотных решений выбрать функции, аналитичные в указанном выше смысле по крутаскаловой координате U , то, как было объяснено в предыдущем разделе, мы придем к вакуумному состоянию, обобщающему вакуум Унру на случай космологической черной дыры (вакуум Гиббонса—Хокинга). Соответствующее разложение оператора поля будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi = \sum_{m, \hat{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} & \left[\frac{e^{q_+}}{(2 \operatorname{ch} 2q_+)^{1/2}} (\psi_\alpha^{(++)} a_\alpha + \psi_\alpha^{(++)*} b^\dagger_\alpha) + \right. \\ & \left. + \frac{e^{q_{++}}}{(2 \operatorname{ch} 2q_{++})^{1/2}} (\psi_\alpha^{(+)} c_\alpha + \psi_\alpha^{(+)*} d^\dagger_\alpha) \right] d\omega, \end{aligned} \quad (93)$$

где $(2 \operatorname{ch} 2q)^{-1/2}$ — нормировочный множитель, учитывающий вклад области I^1 на рис. 1, величины q_+, q_{++} определены, как в (19.21). Операторы $a^\dagger_\alpha, b_\alpha$ описывают рождение частицы и уничтожение

античастицы с квантовыми числами $\alpha = \{\omega, m, \hat{\lambda}\}$, уходящих за космологический горизонт, а операторы c_{α}^{\dagger} и d_{α} — рождение античастицы и уничтожение частицы, поглощаемых черной дырой (разложение сопряженного оператора $\bar{\psi}$ соответственно содержит операторы a^{\dagger} , b , c^{\dagger} и d). Введенные операторы удовлетворяют стандартным фермиевским соотношениям антикоммутации

$$\{a_{\alpha}, a_{\alpha'}^{\dagger}\} = \{b_{\alpha}, b_{\alpha'}^{\dagger}\} = \{c_{\alpha}, c_{\alpha'}^{\dagger}\} = \{d_{\alpha}, d_{\alpha'}^{\dagger}\} = \delta(\omega - \omega') \delta_{mm'} \delta_{\hat{\lambda}\hat{\lambda}'} \quad (94)$$

(все остальные антикоммутаторы равны нулю).

При переходе ко вторично квантованной теории операторы токов j^{μ} , $j^{\mu 5}$, $T^{\mu\nu}$ следует симметризовать, например

$$j^{\mu} = 1/2 [\bar{\psi}, \gamma^{\mu} \psi], \quad (95)$$

а затем подставить разложение (93) и аналогичное разложение для $\bar{\psi}$. Заметим еще раз, что в отличие от теории поля в пространстве Минковского здесь не следует производить нормально-го упорядочения, а устранение бесконечных величин типа собственной энергии вакуума необходимо проводить с помощью явной перенормировочной процедуры.

Среднее значение оператора тока в состоянии вакуума Гиббонса—Хокинга равно

$$\langle GH | j^{\mu} | GH \rangle = \sum_{m\hat{\lambda}} \int d\omega [\text{th } 2q_{+} j^{\mu}(\psi_{\alpha}^{(++)}) + \text{th } 2q_{++} j^{\mu}(\psi_{\alpha}^{(++)})], \quad (96)$$

где $j^{\mu}(\psi_{\alpha})$ — диагональные компоненты соответствующих билинейных форм от классических решений. При «выключении» космологического горизонта $r_{++} \rightarrow \infty$ мы приходим к обычным выражениям, описывающим тепловое распределение фермионов с температурой $T_{+} = \kappa_{+}/2\pi$ [275, 305, 306]. В частности, интегрируя выражения для потоков энергии и углового момента, для потерь массы и момента вращения дыры за счет испускания частиц на бесконечность (помимо этого происходит, как и в скалярном случае, заселение квазистационарных состояний [283]) будем иметь

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M}{J} \right) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m\hat{\lambda}} \int_0^{\infty} d\omega \frac{|\gamma|^2 - |\delta|^2}{\exp(k_{+}/T_{+}) + 1}, \quad (97)$$

что отличается от (19.28) заменой планковского распределения на фермиевское. Числитель этого выражения в отличие от (19.28) не меняет знака для мод $k_{+} < 0$, однако и знаменатель при устремлении к нулю температуры дыры остается положительным, что говорит о наличии спонтанной суперрадиации на этих модах.

Аксиальные аномалии и испарение дайонов

Хорошо известно, что вытекающее из классических уравнений движения равенство (51), выражающее собой частичное сохранение аксиального тока (точное для безмассовых частиц), изменяет свой вид при учете однопетлевых поправок по взаимодействию с калибровочными векторными полями [293—295] (аномалия Адлера) и гравитационным полем [296, 297]. В пределе безмассовых фермионов аномальная дивергенция аксиального тока во внешних электромагнитном и гравитационном полях имеет вид

$$j^{\mu 5}_{;\mu} = \frac{e^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{192\pi^2} \tilde{R}_{\mu\nu\lambda\tau} R^{\mu\nu\lambda\tau}, \quad (98)$$

где $\tilde{R}_{\mu\nu\lambda\tau} = 1/2 E_{\mu\nu\alpha\beta} R_{\lambda\tau}^{\alpha\beta}$ — дуальный тензор кривизны.

Если интеграл от правой части по трехмерному пространству не равен нулю, то квантовое рождение частиц в таком поле должно сопровождаться постоянным потоком киральности вследствие несохранения кирального заряда

$$Q^5 = \int j^{\mu 5} d\Sigma_\mu = \int j^{05} \sqrt{-g} d^3x. \quad (99)$$

Для метрики Керра—Ньюмена интеграл от гравитационного вклада в правую часть (98) обращается в нуль после суммирования по углам, интеграл же от первого слагаемого отличен от нуля, если одновременно электрический и магнитный заряды не равны нулю

$$\frac{e^2}{16\pi^2} \int F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^3x = \frac{e^2}{4\pi^2} \int \text{Im } \Phi_1 \sqrt{-g} d^3x = \frac{ePQ}{\pi r_+}. \quad (100)$$

Покажем, что это выражение можно получить иначе, вычисляя полный поток кирального заряда при испарении черной дыры-дайона.

Прежде всего заметим, что если магнитный заряд отличен от нуля, то оператор Q (64) имеет (среди прочих) нулевое собственное значение. Рассмотрим для простоты случай невращающейся дыры ($a=0$). Тогда система угловых уравнений (74) принимает вид

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{2} - eP}^{(m)} S = -\hat{\lambda} S'; \quad \mathcal{L}_{\frac{1}{2} + eP}^{(m)+} S' = \hat{\lambda} S, \quad (101)$$

где $\mathcal{L}_s^{(m)}$ и $\mathcal{L}_s^{(m)+}$ — операторы (7.11) с заменой $m \rightarrow \tilde{m} = m - eP$. Сопоставляя (100) с формулами (Д.4), (Д.5) Дополнения, легко видеть, что решениями системы являются спинорные сферические функции

$$S = \frac{1}{2} - eP S_{jm}; \quad S' = -\frac{1}{2} - eP S_{jm} \quad (102)$$

и собственное значение

$$\hat{\lambda} = -\sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - (eP)^2}. \quad (103)$$

В силу дираковского условия квантования (18.4) произведение eP является целым или полуцелым числом, поэтому существуют такие целые или полуцелые j , при которых $\hat{\lambda}=0$, именно для $eP > 0$, $j=eP-1/2$ для $eP < 0$, $j=-eP-1/2$. Соответствующие пары угловых функций таковы:

$$Z_0 = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} -jS_{im}^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad eP > 0; \quad Z_0 = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ jS_{im}^0 \end{pmatrix}, \quad eP < 0, \quad (104)$$

причем в обоих случаях число \tilde{m} пробегает $2l+1=2|eP|$ значений.

Рассмотрим теперь радиальные уравнения (73) при $\hat{\lambda}=0$ в безмассовом пределе $\mu=0$. Легко видеть, что R удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{i(\omega r^2 - eQr)}{\Delta_r} R, \quad (105)$$

а R' — комплексно-сопряженному уравнению, допускающим интегрирование в явном виде:

$$R = R'^* = \exp\left(-i \int \frac{\omega r^2 - eQr}{\Delta_r} dr\right). \quad (106)$$

Заметим, что при выбранной нормировке $|R|=|R'|=1$. Выписав явно радиальные компоненты векторного и аксиального токов

$$j^r = \frac{1}{\sqrt{2\Sigma}} (|S|^2 + |S'|^2)(|R|^2 - |R'|^2),$$

$$j'^5 = \frac{1}{\sqrt{2\Sigma}} (|R|^2 + |R'|^2)(|S|^2 - |S'|^2), \quad (107)$$

видим, что для решений (106) радиальный поток заряда (векторный ток) равен нулю, в то время как радиальный поток кирального заряда отличен от нуля, если только не происходит компенсации вкладов угловых функций S и S' . Однако в рассматриваемом случае одна из угловых функций обязательно равна нулю и такой компенсации не возникает, причем частицы разных знаков электрического заряда дают вклады разного знака в силу условий (104). Пусть для определенности $P > 0$. Тогда, переходя к вторично-квантованной теории, основанной на разложении оператора поля (93) (космологическую постоянную здесь для простоты положим равной нулю), для полной потери кирального заряда дыры в единицу времени найдем ($k_+^{(\pm)} = k_+(e = \pm |e|)$):

$$\frac{dQ^5}{dt} = \sum_{|m| \leq |eP| - \frac{1}{2}} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\exp(k_+^{(+)} / T_+) + 1} - \frac{1}{\exp(k_+^{(-)} / T_+) + 1} \right] d\omega = \frac{ePQ}{\pi r_+}, \quad (108)$$

что в точности совпадает с величиной (100), полученной на основе аномального тождества частичного сохранения аксиального тока j^5 . Это неудивительно, так как соответствующая аномалия полностью формируется в однопетлевом приближении, в котором рассчитывается и эффект квантового рождения частиц в поле черной дыры.

Существование «безбарьерных» решений с $\hat{\lambda}=0$ приводит к аномальному увеличению не только скорости испарения черной дыры в данную моду распада, но и к увеличению сечения поглощения длинноволновых фермионов в $(\lambda_c/r_g)^2$ раз (λ_c — комптоновская длина волны частицы, $\lambda_c \gg r_g$). Это явление родственно эффекту монополюного катализа распада протона [316]. В неабелевой модели (например, $SU(5)$) черной дыры Ву-Янга будет происходить преимущественный захват u -кварков и преимущественное тепловое испускание \bar{d} -кварков и позитронов. В результате такая черная дыра, как и регулярный монополь Полякова—т'Хоофта, будет катализировать распад протона. Скорость хокинговского испарения данной моды для «горячей» черной дыры ($\omega M \ll 1$ означает $\omega \ll T$, где T — температура испарения) имеет порядок $\dot{N} \sim M^{-1}$.

Квазистационарные состояния

Так же, как и скалярные, дираковские частицы могут находиться в квазистационарных состояниях, локализованных в области классических финитных орбит, отделенной от черной дыры (и космологического горизонта) широким потенциальным барьером при выполнении условия $\mu M \ll 1$. Построим теорию таких состояний, ограничиваясь случаем $\Lambda=0$. Частица предполагается электрически заряженной, черная дыра может нести как электрический, так и магнитный заряды.

При выполнении условий (в геометрических единицах) $\mu M \ll 1$, $\omega \lesssim \mu$ уравнение для угловых функций (Д.33) сводится к уравнению для спиновых сферических гармоник (Д.9). При $eP \neq 0$ спиновый вес интересующих нас решений угловых уравнений (74) будет равен $\pm 1/2 - eP$ (см. (102)), причем таких решений при заданных l и j будет две пары, соответственно положительным и отрицательным значениям

$$\hat{\lambda} = \pm [j(j+1) - (eP)^2]^{1/2}. \quad (109)$$

Величину $\text{sign } \hat{\lambda}$ можно использовать в качестве квантового числа, характеризующего сложение орбитального и спинового моментов. Если $eP=0$, то справедлива формула (76) и $\hat{\lambda} > 0$ отве-

чает сумме моментов $j = l + 1/2$ ($\hat{\lambda} = l + 1$), а $\hat{\lambda} < 0$ — разности $j = l - 1/2$ ($\hat{\lambda} = -l$). При отличных от нуля eP аналогичную пару состояний можно различать знаком $\hat{\lambda}$.

Обратимся теперь к радиальному уравнению (82). При $\mu M \ll 1$ его решения можно построить аналитически, сшивая решения в трех областях: а) $\mu r \gg |\hat{\lambda}|$, $r \gg r_+$; б) $\mu r \sim |\hat{\lambda}|$, $r \gg r_+$ и в) $\mu r \sim \omega r \ll |\hat{\lambda}|$. Если $\hat{\lambda} \neq 0$ (считаем $|\hat{\lambda}|$ величиной порядка или большей единицы), то при $\omega \sim \mu$, $\mu M \ll 1$ эти области перекрываются. В случае скалярного поля сшивание решений проводилось без промежуточной области б), здесь это невозможно из-за дополнительной особенности в радиальном уравнении (82) в точке $r = -i\hat{\lambda}/\mu$. Идея построения приближенных решений, справедливых каждое в заданной области, сводится к отысканию такой замены функции, которая приводит к уравнению, содержащему не более трех особых точек; при этом в областях б) и в) получается гипергеометрическое уравнение, а в а) — вырожденное гипергеометрическое уравнение. Начнем с дальней области а), в которую, в частности, попадает и классическая потенциальная яма. После замены радиальной функции $R = \sqrt{r} \phi$ для ϕ получаем, как и в скалярном случае, уравнение Уиттекера (19.37), причем параметр q по-прежнему определяется формулой (19.42), а второй параметр функции Уиттекера равен

$$p = [\hat{\lambda}^2 + \hat{\lambda}\omega/\mu + 1/4]^{1/2}. \quad (110)$$

Итак, в области а) имеем

$$R = \sqrt{r} W_{q,p}(2r|\kappa|); \quad |\kappa| = \sqrt{\mu^2 - \omega^2}, \quad (111)$$

что при $r|\kappa| \rightarrow 0$, согласно (19.38), дает

$$R \sim D_1 r^{p+1} + D_2 r^{-p+1}, \quad (112)$$

где D_1 и D_2 — некоторые постоянные. Для получения решения в промежуточной области б) введем комплексную переменную $y = i\mu r/\hat{\lambda}$ и, оставляя главные в рассматриваемом интервале члены, представим уравнение (82) в виде

$$[y(y-1)\partial^2/\partial y^2 - \partial/\partial y - \omega\hat{\lambda}/\mu - \hat{\lambda}^2(1-1/y)]\hat{R} = 0. \quad (113)$$

Решения (113) выражаются через гипергеометрические функции

$$R = C_1 y^{|\hat{\lambda}|} F(-1/2 + p + |\hat{\lambda}|, -1/2 - p + |\hat{\lambda}|; 1 + 2|\hat{\lambda}|; y) + \\ + C_2 y^{-|\hat{\lambda}|} F(-1/2 - p - |\hat{\lambda}|, -1/2 + p - |\hat{\lambda}|; 1 - 2|\hat{\lambda}|; y). \quad (114)$$

Воспользовавшись формулами Куммера, нетрудно убедиться в том, что при больших $|y|$ это решение имеет асимптотику (112)

и, следовательно, сшивается с решением (111). При малых $|y|$, очевидно, имеем

$$R \sim D'_1 r^{\widehat{\lambda}} + D'_2 r^{-\widehat{\lambda}}, \quad (115)$$

где D'_1 и D'_2 — некоторые новые постоянные. Наконец, в области в) удобно использовать переменную x , вводимую соотношением (19.45), и сделать подстановку (19.46). Выбирая в качестве a и β различные комбинации значений

$$\alpha = 1/4 \pm (i\delta - 1/4), \quad \beta = 1/4 \pm (i\delta + 1/4), \quad \delta = k_+ (r_+^2 + a^2) (r_+ - r_-)^{-1}, \quad (116)$$

получим общее решение в области в) в виде

$$R = A \left(\frac{x}{x+1} \right)^{i\delta} F(\widehat{\lambda}, -\widehat{\lambda}; 1/2 + 2i\delta; -x) + \\ + Bx \left(\frac{x}{x+1} \right)^{i\delta-1/2} F(1 + \widehat{\lambda}, 1 - \widehat{\lambda}; 3/2 - 2i\delta; -x). \quad (117)$$

Поскольку гипергеометрическая функция симметрична по первым двум индексам, выражение (117) не изменяется при замене $\widehat{\lambda} \rightarrow -\widehat{\lambda}$, т. е. фактически определяется абсолютной величиной $|\widehat{\lambda}|$. С другой стороны, квазистационарные состояния при $\mu M \ll 1$, как следует из оценок и вычислений, проведенных в § 19, имеют нерелятивистский характер, поэтому $\omega \sim \mu$ и из (110) с достаточной точностью найдем $p = |\widehat{\lambda}| + 1/2 \text{sign } \widehat{\lambda}$.

Асимптотика (117) при $x \gg 1$ совпадает с (115), т. е. это решение сшивается с промежуточным решением (114). Вблизи горизонта (117) является суперпозицией выходящей и входящей волн, причем амплитуда падающей на черную дыру волны (второе слагаемое) в соответствии с общими свойствами решений радиального уравнения (см. (84)) стремится к нулю. Первый член в (117) — волна, выходящая из черной дыры. Условие, определяющее комплексные энергии квазисвязанных состояний, заключается в равенстве $A=0$. В результате сшивки (111) и (114) при $r|\kappa| \ll 1$, $|y| \gg 1$, а затем (114) и (117) при $|y| \ll 1$, $x \gg 1$ последовательно определяем постоянные C_1 , C_2 , A , B . Решение уравнения $A=0$ снова ищем в виде (19.44) и в основном приближении получаем кулоновский спектр (19.56). Поправка v будет иметь несколько различных вид в зависимости от знака $\widehat{\lambda}$:

$$v = \left[\mu \frac{r_+ - r_-}{2} \right]^{2|\widehat{\lambda}|} (\mu M - eQ)^{2|\widehat{\lambda}|-1} [\text{tg}(\pi|\widehat{\lambda}|) \text{th}(2\pi\delta) + i] \times \\ \times \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{k'=1}^{\infty} \frac{1 - (2\delta)^2 (k' - 1/2)^{-2}}{1 - (2\delta)^2 (k + |\widehat{\lambda}| + 1/2)^{-2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{(\mu M - eQ)^2 \Gamma(n + |\hat{\lambda}| + 1) \Gamma^{-1}(n - |\hat{\lambda}|) \Gamma^{-2}(1 + |2\hat{\lambda}|) n^{-2|\hat{\lambda}| - 1}}{\Gamma(n + |\hat{\lambda}|) \Gamma^{-1}(n - |\hat{\lambda}| + 1) \Gamma^{-2}(2|\hat{\lambda}|) n^{1 - |2\hat{\lambda}|}} \right\}, \quad (118)$$

где верхняя строка отвечает $\hat{\lambda} > 0$, а нижняя — $\hat{\lambda} < 0$. Поправка к энергии вычисляется по формуле (19.59) (при $eP \neq 0$ нужно заменить $v_2 = -iv$) и является комплексной величиной, т. е. описывает сдвиг и затухание уровней. Сдвиг уровней исчезает при $eP = 0$, в этом случае формула (118) согласуется с результатами, полученными в [308]. В отличие от случая бесспиновой частицы мнимая часть энергии не меняет знака при $k_+ < 0$, т. е. суперрадиационное возбуждение фермионных уровней, как и следовало ожидать, невозможно. Тепловое заполнение фермионных состояний вокруг черной дыры было рассмотрено в работе [283].

Нулевые моды

Как было впервые показано Джекивом и Ребби [244], для регулярного магнитного монополя Полякова—т'Хоофта в пространстве Минковского существуют нетривиальные решения с нулевой частотой. Эти решения нормируемы и должны быть включены в полную систему классических мод при вторичном квантовании теории. Поскольку добавление фермиона в состоянии с нулевой энергией к состоянию монополя не изменяет полной энергии системы, ее наименьшее энергетическое состояние оказывается вырожденным и ему следует приписать дробное фермионное число (так, чтобы разность фермионных зарядов вырожденных состояний вакуума равнялась единице).

Нулевые фермионные моды для монополя т'Хоофта—Полякова возникают благодаря существованию «безбарьерных» решений радиальной части уравнения Дирака, аналогичных рассмотренным выше при обсуждении испарения дайна. Такие моды существуют и для черных дыр, обладающих магнитным зарядом, и, как было обращено внимание в работе [245], это могло бы приводить к аналогичным выводам о фермионной структуре для черных дыр. Покажем, однако, что такие решения в случае черных дыр, хотя и существуют и всюду регулярны, не могут быть интерпретированы в духе Джекива—Ребби, так как соответствующий нормировочный интеграл расходится.

Рассмотрим радиальные уравнения (73) при $a = Q = \Lambda = 0$ для собственного значения $\hat{\lambda} = 0$ (угловые функции тогда определяются формулами (104))

$$\sqrt{\Delta_r} \frac{\partial R}{\partial r} = i\mu r R', \quad \sqrt{\Delta_r} \frac{\partial R'}{\partial r} = -i\mu r R. \quad (119)$$

Нетрудно убедиться в том, для существуют убывающие на бесконечности и регулярные на горизонте событий точные решения системы (119)

$$R = e^{-\mu \hat{r}}, \quad R' = ie^{-\mu \hat{r}}, \quad (120)$$

где введена переменная $\hat{r} = \int r dr \Delta_r^{-1/2}$. Такие решения регулярны на горизонте, если только функция Δ_r не имеет в этой точке двойного нуля, что имеет место для экстремальной рейсснер-нордстремовской дыры. Подставим полученные решения в нормировочный интеграл

$$\int \bar{\psi} \gamma^0 \psi \sqrt{-g} d^3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\mu \hat{r}) d\hat{r}. \quad (121)$$

При $r^* \rightarrow -\infty$ переменная \hat{r} остается конечной, поэтому интеграл (121) расходится на нижнем пределе. Интересно отметить, что аналогичный интеграл для кирального заряда остается конечным

$$[Q^5] = \frac{11}{2\mu} (1 - P^2/M^2) - \mu M. \quad (122)$$

§ 21. МАССИВНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Заканчивая обсуждение теории массивных полей в окрестности черных дыр, рассмотрим комплексное (заряженное) векторное поле V_μ на фоне электровакуумного решения типа D . Будем считать, что взаимодействие V_μ с гравитационным полем носит минимальный характер, т. е. полевые уравнения являются общековариантным обобщением соответствующих уравнений в пространстве Минковского. Что же касается взаимодействия V_μ с электромагнитным полем фона, то, как известно, в современных калибровочных теориях (в частности, теории электрослабого взаимодействия) оно характеризуется, помимо электрического заряда e , еще одним параметром, обозначаемым ниже γ , задающим аномальный магнитный момент векторной частицы. Соответствующий лагранжиан получается из стандартного лагранжиана Прока добавлением полной дивергенции $\gamma \nabla^\mu (V_{[\mu} V_{\nu]}^* + \text{к. с.})$ и последующим удлинением производных:

$$\mathcal{L} = -1/2 W_{\mu\nu} W^{\mu\nu*} + \mu^2 V_\nu V^{\nu*} - ie\gamma F_{\mu\nu} V^\mu V^{\nu*}, \quad (1)$$

где

$$W_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\nabla}_\mu V_\nu - \overset{\circ}{\nabla}_\nu V_\mu \equiv V_{\nu;\mu} - V_{\mu;\nu} + 2ieA_{[\mu} V_{\nu]} \quad (2)$$

обобщенный бивектор поля, $\overset{\circ}{\nabla}_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu$ — удлинённая ковариантная производная, A_μ — 4-потенциал, а $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженностей внешнего электромагнитного поля, μ — масса векторной частицы. Варьируя действие, получим уравнения поля

$$\overset{\circ}{\nabla}_\nu W^{\mu\nu} = \mu^2 V^\mu + ie\gamma F^{\mu\nu} V_\nu. \quad (3)$$

Не все компоненты поля V_μ независимы, дифференцируя (3), найдем условие связи

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{ie}{2\mu^2} (1-\gamma) F^{\mu\nu} W_{\mu\nu} + ie\gamma F^{\mu\nu}{}_{;\nu} V_\mu. \quad (4)$$

Дуальный бивектор поля $\tilde{W}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} E_{\mu\nu\lambda\tau} W^{\lambda\tau}$, в отличие от максвелловского случая, удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\nabla_\nu \tilde{W}^{\mu\nu} = ie \tilde{F}^{\mu\nu} V_\nu. \quad (5)$$

Для перехода к описанию векторного поля в формализме Ньюмена—Пенроуза построим самодуальную и антисамодуальную комбинации $W_{\mu\nu}^\pm = \frac{1}{2} (W_{\mu\nu} \pm i \tilde{W}_{\mu\nu})$. Из уравнений (3) и (5) для них будем иметь

$$\nabla^\nu W_{\mu\nu}^\pm = \frac{\mu^2}{2} V_\mu + ie \left[F_{\mu\nu}^\pm + \frac{1}{2} (\gamma-1) F_{\mu\nu} \right] V^\nu, \quad (6)$$

где $F_{\mu\nu}^+$ — самодуальный бивектор внешнего электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}^- = (F_{\mu\nu}^+)^*$. Заметим, что эта система при $\gamma=1$ (что имеет место в модели Вайнберга—Салама) более симметрична: в уравнение для самодуального (антисамодуального) бивектора $W_{\mu\nu}^\pm$ входит тогда лишь самодуальный (антисамодуальный) бивектор электромагнитного поля фона.

Введенные величины $W_{\mu\nu}^\pm$ имеют следующие разложения по базисам самодуальных и антисамодуальных бивекторов:

$$W_{\mu\nu}^\pm = \Phi_0^\pm m_{[\mu} \bar{n}_{\nu]} + \Phi_1^\pm (n_{[\mu} l_{\nu]} + m_{[\mu}^\mp m_{\nu]}^\mp) + \Phi_2^\pm l_{[\mu} m_{\nu]}^\pm, \quad (7)$$

где $m_\mu^+ \equiv m_\mu$, $m_\mu^- \equiv m_\mu^*$ и введены шесть комплексных скаляров Φ_a^\pm , $a=0, 1, 2$ (для вещественного поля $\Phi_a^- = (\Phi_a^+)^*$). Обратный переход от тензора поля к скалярам Ньюмена—Пенроуза осуществляется по формулам

$$\Phi_0^\pm = W^{\pm\mu\nu} l_\mu m_\nu^\pm; \quad \Phi_1^\pm = \frac{1}{2} W^{\pm\mu\nu} (l_\mu n_\nu + m_\mu^\mp m_\nu^\mp); \quad \Phi_2^\pm = W^{\pm\mu\nu} m_\mu^\mp n_\nu. \quad (8)$$

Проектируя уравнения (5) на векторы изотропной тетрады, получим систему уравнений для скаляров Φ_a^\pm , аналогичную уравнениям Максвелла с источниками, в роли которых выступает само поле V_μ . Так, для Φ_a^+ будем иметь

$$(D-2\rho+ieA_l)\Phi_1^+ - (\delta^* + \pi - 2\alpha + ieA_m^*)\Phi_0^+ = g_l V_l;$$

$$(\delta - 2\tau + ieA_m)\Phi_1^+ - (\Delta + \mu - 2\gamma + ieA_n)\Phi_0^+ = g_m V_m;$$

$$\begin{aligned}
& -(\delta^* + 2\pi + ieA_{m^*}) \Phi_1^+ + (D - \rho + ieA_l) \Phi_2^+ = g_{m^*} V_{m^*}; \\
& -(\Delta + 2\mu + ieA_n) \Phi_1^+ + (\delta - \tau + 2\beta + ieA_m) \Phi_2^+ = g_n V_n,
\end{aligned} \quad (9)$$

где введены величины

$$g_k' = \frac{1}{2} \{ \mu^2 + ie [a_k (\gamma + 1) \Phi_1^{\text{фон}} + b_k (\gamma - 1) \Phi_1^{\text{фон}*}] \}, \quad k = l, n, m, m^*, \quad (10)$$

$\Phi_1^{\text{фон}}$ — единственный отличный от нуля скаляр фонового поля, и постоянные равны $a_l = a_m = -a_{m^*} = -a_n = b_l = -b_m = b_{m^*} = -b_n = 1$.

В формализме первого порядка в качестве полевых функций можно выбрать скаляры Φ^\pm_a и тетрадные проекции поля V_μ . Для замыкания системы уравнений достаточно записать в терминах тетрадных проекций определение (2) бивектора поля:

$$\begin{aligned}
\Phi_0^+ &= (D - \rho^* + ieA_l) V_m - (\delta + ieA_m) V_l; \quad 2\Phi_1^+ = (D + \rho - \rho^* + ieA_l) V_n - \\
& - (\Delta + \mu^* - \mu - \gamma - \gamma^* + ieA_n) V_l + (\delta^* - \tau^* - 2\alpha + ieA_{m^*}) V_m - \\
& - (\delta + 2\beta + \tau + ieA_m) V_{m^*}; \\
\Phi_2^+ &= (\delta^* + \pi - \tau^* + ieA_{m^*}) V_n - (\Delta + \gamma - \gamma^* + \mu^* + ieA_n) V_{m^*}.
\end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы получить аналогичную систему для антисамодуальной части поля, нужно все операторы и спинные коэффициенты в (9), (11) заменить на комплексно сопряженные, оставив без изменения электромагнитные добавки ieA , кроме того, $V_m \leftrightarrow V_{m^*}$ и в правых частях в (9) $e \rightarrow -e$, $\gamma \rightarrow -\gamma$.

Разделение переменных

Покажем, что система уравнений (9), (11) и дуально сопряженных к ним, описывающих массивное векторное поле в формализме первого порядка, допускает полное разделение переменных для фонового поля Рейсснера—Нордстрема—де Ситтера (с электрическим и магнитным зарядами). Выбирая в соответствии с симметрией задачи моды, зависящие от времени как $\exp(-i\omega t + im\varphi)$, и используя представления для операторов и формулы для спинных коэффициентов, приведенные в § 18 при $a=0$, из системы (9) для зависящих от r и θ амплитуд получим

$$\begin{aligned}
r^{-2} \tilde{\mathcal{Z}}_0 (r^2 \Phi_1^+) - (\sqrt{2} r)^{-1} \tilde{\mathcal{Z}}_1 \Phi_0^+ &= 1/2 [\mu^2 - e(i\gamma Q - P) r^{-2}] V_l; \\
\Delta (2r)^{-1} \tilde{\mathcal{Z}}_1^+ \Phi_0^+ + (\sqrt{2} r)^{-1} \tilde{\mathcal{Z}}_0^+ \Phi_1^+ &= 1/2 [\mu^2 - e(iQ - \gamma P) r^{-2}] V_m; \\
r^{-1} \tilde{\mathcal{Z}}_0 (r \Phi_2^+) - (\sqrt{2} r)^{-1} \tilde{\mathcal{Z}}_0 \Phi_1^+ &= 1/2 [\mu^2 + e(iQ - \gamma P) r^{-2}] V_{m^*}; \\
\Delta r^{-4} \tilde{\mathcal{Z}}_0^+ (r^2 \Phi_1^+) + \sqrt{2} r^{-1} \tilde{\mathcal{Z}}_1^+ \Phi_2^+ &= [\mu^2 + e(i\gamma Q - P) r^{-2}] V_n.
\end{aligned} \quad (12)$$

Выражения (11) для скаляров Ньюмена—Пенроуза при этом будут иметь вид

$$\begin{aligned}\Phi_0^+ &= r^{-1} [\tilde{\mathcal{D}}_0(rV_m) - \tilde{\mathcal{L}}_0^+ V_l / \sqrt{2}]; \\ 2\Phi_1^+ &= \tilde{\mathcal{D}}_0 V_n + \Delta/2 \tilde{\mathcal{D}}_1^+ (r^{-2} V_l) + (\sqrt{2} r)^{-1} (\tilde{\mathcal{L}}_1 V_m - \tilde{\mathcal{L}}_1^+ V_{m*}); \\ \Phi_2^+ &= \Delta (2r^3)^{-1} \tilde{\mathcal{D}}_0^+ (rV_{m*}) + (\sqrt{2} r)^{-1} \tilde{\mathcal{L}}_0 V_n.\end{aligned}\quad (13)$$

Аналогичные уравнения для Φ^-_a получаются заменой в этих формулах операторов $\tilde{\mathcal{L}}_s \leftrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_s^+$, проекций поля $V_m \leftrightarrow V_{m*}$ и $e \rightarrow -e$, $\gamma \rightarrow -\gamma$ в правых частях в (12). Здесь $\tilde{\mathcal{L}}_s$ и $\tilde{\mathcal{D}}_n$ — операторы, определенные формулами (19.10) при $a=0$. Разделение угловых и радиальных переменных в этой системе осуществляется с помощью подстановки ($s_0 = eP$, $m_0 = m - s_0$):

$$\begin{aligned}\Phi_0^\pm &= 2r\Delta^{-1} R_0^\pm(r)_{s_0 \pm 1} S_{lm_0}(\theta); \quad \Phi_1^\pm = r^{-1} R_1^\pm(r)_{s_0} S_{lm_0}(\theta); \\ \Phi_2^\pm &= r^{-1} R_2^\pm(r)_{s_0 \mp 1} S_{lm_0}(\theta). \\ V_l &= 2r R_{ls_0} S_{lm_0}; \quad V_n = \Delta r^{-1} R_{ns_0} S_{lm_0}; \quad V_m = 2r R_{ms_0+1} S_{lm_0}; \\ V_{m*} &= 2r R_{m*s_0-1} S_{lm_0},\end{aligned}\quad (14)$$

где $sS_{lm}(\theta)$ — спинные сферические функции (Д.16). Если воспользоваться рекуррентными соотношениями (Д.8), (Д.7) для этих функций, то в каждом из четырнадцати уравнений первого порядка угловая зависимость будет сосредоточена в спинных сферических функциях одинакового веса, после чего они сокращаются и остается система для радиальных уравнений. Исключая с помощью уравнений (12) (и дуально сопряженных) тетрадные проекции поля V_μ , получим две системы из трех уравнений второго порядка для функций R^\pm_a . Для дальнейшего анализа обратимся к наиболее простому случаю нейтрального векторного поля на фоне метрики Шварцшильда.

Квазисвязанные состояния в поле Шварцшильда

Система радиальных уравнений второго порядка для $R^+_a \equiv R_a$ (при этом $R^-_a = R^*_a$) приобретает симметричный вид:

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0^+ - U) R_0 + \sqrt{2} \lambda r^{-2} R_1 &= 0, \\ (\mathcal{D}_0^+ \mathcal{D}_0 - U) R_2 + \sqrt{2} \lambda r^{-2} R_1 &= 0, \\ r^3 (\mathcal{D}_1^+ r^{-4} \mathcal{D}_0 r + \mathcal{D}_1 r^{-4} \mathcal{D}_0^+ r - 2U) R_1 + 2\sqrt{2} \lambda \Delta^{-1} (R_0 + R_2) &= 0,\end{aligned}\quad (15)$$

где $\lambda^2 = l(l+1)$ и введен потенциал $U = (\lambda^2 + \mu^2 r^2) \Delta^{-1}$. Для массивного заряженного поля Прока в кулоновском поле, как утверждалось в работе [317], не существует связанных состояний из-за сингулярного поведения радиальных функций в начале координат. В случае черной дыры сингулярность скрыта за горизонтом собы-

тий и вместо граничных условий в начале координат возникают граничные условия поглощения на горизонте. Можно ожидать, что если эффект поглощения поля черной дырой достаточно мал, то векторные частицы, как и скалярные, будут образовывать вокруг черной дыры квазистационарные состояния. В работе [309] было показано, что это действительно так, по крайней мере для черных дыр, радиус горизонта событий которых мал по сравнению с комптоновской длиной волны частицы. Ограничиваясь здесь отысканием вещественной части спектра энергий квазисвязанных состояний, рассмотрим систему радиальных уравнений (15) при $r \gg 2M$. Нетрудно убедиться в том, что в этой области значений аргумента система (15) имеет решения, выражающиеся через функции Уиттекера $R_a = C_a W_{q,p}(z)$; $z = 2\kappa r$, где $\kappa = \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$; $q = (2\omega^2 - \mu^2)M/\kappa$ (при $\omega < \mu$), значение параметра p пока не определено. Подстановка R_a в таком виде в уравнения (15) приводит к системе линейных соотношений для коэффициентов C_a , содержащей параметр $\omega = p^2 - \lambda^2 - 1/4$,

$$\omega C_0 + \sqrt{2} \lambda C_1 = 0; \quad \sqrt{2} \lambda C_1 + \omega C_2 = 0;$$

$$\lambda \sqrt{2} C_0 + (\omega - 2) C_1 + \sqrt{2} \lambda C_2 = 0. \quad (16)$$

Нетривиальные решения этой системы существуют, если ее определитель равен нулю: $\omega(\omega^2 - 2\omega - 4\lambda^2) = 0$, откуда находим три линейно-независимых решения: $\omega = 0$, $p = l + 1/2$, $C_0 = -C_2$, $C_1 = 0$; $\omega = 1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda^2} = 1 \pm 2(l + 1/2)$, $p = l + 1/2 \pm 1$, $C_0 = C_2 = \mp [l/(l + 1)]^{\pm 1/2} C_1 / \sqrt{2}$. Вводя спиновое квантовое число σ , положим $p = l + 1/2 + \sigma$, тогда $\sigma = 0, \pm 1$ для первого, второго и третьего решений соответственно. Если полностью пренебречь поглощением частиц черной дырой, то в качестве условия квантования можно использовать требование отсутствия растущего решения при $z \ll 1$, что ввиду соотношения (19.39), дает $1/2 + p - q = -n_r$, где $n_r = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда получаем формулу для уровней ($\mu M \ll 1$)

$$\omega = \mu \left[1 - \frac{(\mu M)^2}{2(l + 1 + n_r + \sigma)^2} \right]. \quad (17)$$

Параметр σ характеризует три возможных спиновых состояния векторной частицы. Для определения мнимой части энергии необходимо, как и в § 19, 20, произвести сшивание построенных решений с решениями вблизи горизонта событий.

СПИНОВЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ, СФЕРОИДАЛЬНЫЕ И РОДСТВЕННЫЕ ИМ ФУНКЦИИ

Разделение переменных в волновых уравнениях безмассовых полей различного спина в метрике Керра приводит к угловым функциям, являющимся решениями дифференциального уравнения

$$\left[(1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + (\gamma z)^2 - 2s\gamma z - \frac{m^2 + s^2 + 2msz}{1-z^2} \right] {}_sS_{lm}^\gamma = -{}_sE_{lm}^\gamma {}_sS_{lm}^\gamma, \quad (\text{Д.1})$$

причем собственное значение ${}_sE_{lm}^\gamma$ задается двумя целыми или полуцелыми числами l , $|m| \leq l$ при целом или полуцелом s соответственно, γ — вещественный параметр [9]. Связь ${}_sE_{lm}^\gamma$ с введенной в гл. II константой разделения λ выражается соотношением

$${}_s\lambda_{lm}^\gamma = {}_sE_{lm}^\gamma - s(s+1) - 2m\gamma + \gamma^2, \quad \gamma = a\omega. \quad (\text{Д.2})$$

Регулярные решения уравнения (Д.1) существуют при $l \geq s$. Для $s=0$ уравнение (Д.1) сводится к уравнению для сплюснутых сфероидальных функций [93], решения которого хорошо изучены [312]. При $\gamma=0$ (Д.1) переходит в уравнение для спиновых сферических функций ${}_sS_{lm}$ [310], возникающих при описании безмассовых полей в пространстве Минковского методом изотропной тетрады Ньюмена—Пенроуза [48].

Спиновые сферические функции

В трехмерном евклидовом пространстве введем сферические координаты (r, θ, φ) и тройку ортонормированных векторов \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_φ , направленных вдоль соответствующих координатных линий. Рассмотрим преобразования комплексных изотропных векторов $\mathbf{e}_\pm = (\mathbf{e}_\theta \pm i\mathbf{e}_\varphi)/\sqrt{2}$, касательных к единичной сфере, при повороте на угол ψ в касательной плоскости: $\mathbf{e}_+ \rightarrow \mathbf{e}_+ \exp(i\psi)$, $\mathbf{e}_- \rightarrow \mathbf{e}_- \exp(-i\psi)$. Ясно, что при таком преобразовании скаляр $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_+)$, где \mathbf{M} — некоторый вектор, умножится на $\exp(i\psi)$, проекция на комплексно сопряженный изотропный вектор $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_-)$ умножится на $\exp(-i\psi)$. Говорят, что $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_+)$ и $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_-)$ есть величины спинного веса $+1$ и -1 соответственно. В общем случае некоторый скаляр называется величиной спинного веса s , если при описанном вращении репера он умножается на $\exp(is\psi)$. В терминах стереографических координат $\zeta = \text{ctg}(\theta/2) \exp(i\varphi)$ и ζ^* на единичной сфере

$$dl^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 = P^{-2} d\zeta d\zeta^*; \quad P = 1/2(1 + \zeta\zeta^*), \quad (\text{Д.3})$$

операторы $\check{\delta}$ и $\check{\delta}^*$, заданные соотношениями

$$\check{\delta}\eta_{(s)} = 2P^{1-s} [\partial (P^s \eta_{(s)}) / \partial \xi]; \quad \check{\delta}^* \eta_{(s)} = 2P^{1+s} [\partial (P^{-s} \eta_{(s)}) / \partial \xi^*], \quad (\text{Д.4})$$

превращают величину спинowego веса s в величины веса $s \pm 1$ соответственно. В обычных сферических координатах

$$\begin{aligned} \check{\delta}^* &= - \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + s \operatorname{ctg} \theta \right) = - \mathcal{L}_s; \\ \check{\delta} &= - \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - s \operatorname{ctg} \theta \right) = - \mathcal{L}_{-s}^+, \end{aligned} \quad (\text{Д.5})$$

при этом следует иметь в виду, что символом $\check{\delta}$ обозначаются различные операторы типа (Д.5) в зависимости от спинowego веса величины, на которую они действуют, например $(\check{\delta}^*)^2 \eta_{(s)} = \mathcal{L}_{s+1} \mathcal{L}_s \eta_{(s)}$, и т. п.

Применяя s -кратно оператор $\check{\delta}$ к сферическим функциям (имеющим спиновой вес нуль), получим спиновые сферические функции веса s :

$${}_s Y_{lm}(\theta, \varphi) = \left[\frac{(l-s)!}{(l+s)!} \right]^{1/2} \check{\delta}^s Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad 0 \leq s \leq l \quad (\text{Д.6})$$

(если для правой части (Д.6) написать разложение в ряд (см. ниже), то эта формула будет применима и при полуцелых s , в этом случае l также должны быть полуцелыми). Нетрудно проверить выполнение для (Д.6) следующих рекуррентных соотношений повышения и понижения спинowego веса:

$$\mathcal{L}_s {}_s Y_{lm} = [(l+s)(l-s+1)]^{1/2} {}_{s-1} Y_{lm}, \quad (\text{Д.7})$$

$$\mathcal{L}_{-s}^+ {}_s Y_{lm} = -[(l-s)(l+s+1)]^{1/2} {}_{s+1} Y_{lm}, \quad (\text{Д.8})$$

откуда следует, что ${}_s Y_{lm}$ являются собственными функциями оператора

$$\mathcal{L}_{s+1} \mathcal{L}_{-s}^+ {}_s Y_{lm} = -(l-s)(l+s+1) {}_s Y_{lm}. \quad (\text{Д.9})$$

Сравнивая это уравнение с (Д.1), находим собственные значения

$${}_s E_{lm}^{y=0} = l(l+1); \quad l \geq |s|. \quad (\text{Д.10})$$

При $s=0$ получаем обычные сферические функции. С помощью рекуррентных соотношений и уравнения (Д.9) можно свести функции высшего спинowego веса (при целом s) к сферическим функциям и их первым производным, например

$$\begin{aligned} -{}_2 Y_{lm} = & \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \left[\left(\frac{2m(m-\cos \theta)}{\sin^2 \theta} - l(l+1) \right) Y_{lm} + \right. \\ & \left. + \frac{2m(m-\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} Y_{lm} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Д.11})$$

Зависимость функций (Д.6) от угла φ , как и обычных сферических функций, дается экспоненциальным множителем:

$${}_s Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} {}_s S_{lm}(\theta). \quad (\text{Д.12})$$

Нормировочный коэффициент в (Д.6) выбран так, что

$$\int_{-1}^1 {}_s S_{l'm}(\theta) {}_s S_{lm}(\theta) d \cos \theta = \delta_{ll'}. \quad (\text{Д.13})$$

Спиновые сферические функции веса s образуют полную систему функций на единичной сфере

$$\sum_{l=|s|}^{\infty} \sum_{m=-l}^l {}_s Y_{lm}^*(\Omega') {}_s Y_{lm}(\Omega) = \delta^2(\Omega, \Omega'), \quad (\text{Д.14})$$

причем суммирование по l начинается от $|s|$ (рекуррентные соотношения (Д.7), (Д.8) гасят гармоники с $l < |s|$). Отметим также полезное соотношение

$$\sum_{s=-l}^l {}_s Y_{lm}^* {}_s Y_{lm} = \frac{2l+1}{4\pi} \delta_{mm'}. \quad (\text{Д.15})$$

Переписав (Д.6) в терминах координат θ, φ , получим

$${}_s S_{lm} = \left[\frac{(l+m)! (l-m)! (2l+1)}{2(l+s)! (l-s)!} \right]^{1/2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2l} \times \\ \times \sum_k \binom{l-s}{k} \binom{l+s}{k+s-m} (-1)^{l-k-s} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{2k+s-m}. \quad (\text{Д.16})$$

Приведем также значения S_{lm} и ее первой производной при $\theta = \pi/2$ ($m > 0$):

$$S_{lm} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!} \right]^{1/2} \frac{2^m \sqrt{\pi}}{\Gamma \left(\frac{l-m}{2} + 1 \right) \Gamma \left(\frac{-l-m+1}{2} \right)}; \\ S'_{lm} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!} \right]^{1/2} \frac{2^{m+1} \sqrt{\pi}}{\Gamma \left(\frac{l-m+1}{2} \right) \Gamma \left(-\frac{l+m}{2} \right)}. \quad (\text{Д.17})$$

Обсуждение связи спиновых сферических функций с d -функциями Вигнера можно найти в [310].

Спиновые сферические функции

Так, в работе [9] были названы решения задачи Штурма—Лиувилля (Д.1) при $\gamma \neq 0$ и целых или полуцелых s . Аналитиче-

ской формулы для собственных значений ${}_sE_{lm}^\gamma$ не существует (таблицы имеются в [2, 311]). При малых γ можно построить ряды теории возмущений [95, 97]:

$${}_sE_{lm}^\gamma = \begin{cases} l(l+1) - 2s\gamma m [l(l+1)]^{-1} + \dots, & s \neq 0, \\ l(l+1) + 2\gamma^2 \frac{m^2 + l(l+1) - 1}{(2l-1)(2l+3)} + \dots, & s = 0. \end{cases} \quad (\text{Д.18})$$

Заметим, что из уравнений (Д.1) следует

$${}_sE_{lm}^\gamma = {}_sE_{lm}^{\gamma*} = -{}_sE_{l-m}^{-\gamma} = -{}_sE_{lm}^\gamma, \quad (\text{Д.19})$$

поэтому спинные сфероидальные функции

$${}_sZ_{lm}^\gamma(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} {}_sS_{lm}^\gamma(\theta) e^{im\varphi}, \quad (\text{Д.20})$$

где ${}_sS_{lm}^\gamma$ предполагаются нормированными согласно (Д.13), можно выбрать удовлетворяющими условиям

$${}_sZ_{lm}^\gamma(\theta, \varphi) = (-1)^l {}_{-s}Z_{lm}^\gamma(\pi - \theta, \varphi + \pi); {}_sZ_{lm}^{\gamma*} = (-1)^{s+m} {}_{-s}Z_{l-m}^{-\gamma}, \quad (\text{Д.21})$$

которые имеют место для спинных сферических гармоник.

Рекуррентные соотношения типа (Д.6), (Д.7) в случае $\gamma \neq 0$ уже не выполняются, однако существуют формулы связи между гармониками с противоположными значениями спинного веса s [89, 311]:

$$\mathcal{L}_{-s+1} \mathcal{L}_{-s+2} \dots \mathcal{L}_s {}_sS_{lm}^\gamma = {}_sC_{lm}^\gamma {}_{-s}S_{lm}^\gamma, \quad (\text{Д.22})$$

$$\mathcal{L}_{-s+1}^+ \mathcal{L}_{-s+2}^+ \dots \mathcal{L}_s^+ {}_{-s}S_{lm}^\gamma = {}_sC_{lm}^\gamma {}_sS_{lm}^\gamma, \quad (\text{Д.23})$$

где операторы \mathcal{L}_s и \mathcal{L}_s^+ определены формулами (7.11). Значения постоянных C для $s=1/2, 1, 2$ таковы:

$${}_{1/2}C = -(d+1/4)^{1/2}; d = {}_sE_{lm}^\gamma + \gamma^2 - 2\gamma m, \quad (\text{Д.24})$$

$${}_1C = [d^2 + 4\gamma(m-\gamma)]^{1/2}, \quad (\text{Д.25})$$

$${}_2C = \{ {}_1C^2 [(d-2)^2 + 36\gamma(m-\gamma)] + (2d-1)48\gamma(2\gamma-m) - 144\gamma^2 \}^{1/2}. \quad (\text{Д.26})$$

Для спинных сфероидальных функций также выполняется условие полноты (Д.14) при каждом s .

При больших значениях индекса $|m|$ и параметра γ (считаем $\gamma_0 = a\omega/m \sim 1$) и не слишком больших $q = l - |m|$ (для рассмотренных в книге приложений представляют интерес два случая а) $q \sim 1$ и б) $q \sim |m|^{1/3}$) можно аппроксимировать сфероидальные гармоники со спинным весом с помощью полиномов Эрмита. Идея приближения основана на наблюдении, что при больших

индексах эти функции быстро убывают с увеличением угла отклонения от экваториальной плоскости $\alpha = \pi/2 - \theta$ (в чем можно убедиться, применяя к уравнению (Д.1) метод ВКБ). Вводя новую независимую переменную $\xi = |m|^{1/2} (1 - \gamma_0^2)^{1/4} z$ и новую функцию $u = (1 - z^2)^{1/2} {}_sSv_{lm}$, получим из (Д.1) уравнение без первой производной. Разложив в нем эффективный потенциал по степеням ξ , будем иметь уравнение

$$(-d^2/d\xi^2 + \xi^2 + V(\xi))u = Qu; \quad Q = {}_sEv_{lm} - m^2, \quad (\text{Д.27})$$

где через V обозначены члены, малые при $|m| \rightarrow \infty$. Если отбросить V , решением (Д.27) будут функции гармонического осциллятора

$$U^{(0)} = |m|^{1/4} (1 - \gamma_0^2)^{1/8} 2^{-q/2} \pi^{-1/4} (q!)^{-1/2} \exp(-\xi^2/2) H^q(\xi) \quad (\text{Д.28})$$

(с учетом нормировки ${}_sSv_{lm}$) и собственные значения равны

$$Q^{(0)} = m(1 - \gamma_0^2)^{1/2} (2q + 1); \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Д.29})$$

«Среднее значение координаты ξ в состоянии, описываемом «волновой функцией» (Д.28), имеет порядок \sqrt{q} , поэтому для небольших q в разложении потенциала достаточно сохранить один член (случай а)):

$$V_1 = 2s\xi |m|^{-1/2} (1 + \gamma_0) (1 - \gamma_0^2)^{-3/4}, \quad (\text{Д.30})$$

а для $q \sim |m|^{1/3}$ (случай б)) следует удерживать три слагаемых $V = V_1 + V_2 + V_3$:

$$\begin{aligned} V_2 &= -Q^{(0)} \xi^2 m^{-2} (1 - \gamma_0^2)^{-1}; \\ V_3 &= \xi^4 m^{-1} (2 - \gamma_0^2) (1 - \gamma_0^2)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (\text{Д.31})$$

Применяя к этим потенциалам теорию возмущений, найдем поправки к собственным значениям Q и функциям (Д.28), что необходимо из-за сокращения основных членов в вычислениях § 16. Значения функций ${}_sSv_{lm}$ и их производных при $\theta = \pi/2$ следуют из полученных выражений через полиномы Эрмита с учетом значений последних в точке нуль

$$H_q(0) = (-1)^{q/2} q! (q/2)!^{-1}, \quad q \text{ — четное}; \quad H_q(0) = 0, \quad q \text{ — нечетное}. \quad (\text{Д.32})$$

«Массивные» угловые гармоники спина 1/2

Разделение переменных в уравнении Дирака для массивного поля спина 1/2 в метрике Керра приводит к системе угловых уравнений (20.74), из которых после исключения функций S' получаем при $\Lambda = eP = 0$

$$\left(\mathcal{L}_{1/2} \mathcal{L}_{1/2}^+ + \frac{a\mu \sin \theta}{a\mu \cos \theta + \hat{\lambda}} \mathcal{L}_{1/2}^+ - a^2 \mu^2 \cos^2 \theta \right) \hat{S} = -\hat{\lambda}^2 S. \quad (\text{Д.33})$$

Это уравнение обобщает (Д.1) (при $s=1/2$), переходя в последнее при $\mu=0$. Его решения исследовались в [301, 302]. При $a=0$ (Д.33) сводится к уравнению для спиновых сферических функций веса $1/2$, ${}_{1/2}S_{jm}$, соответствующая функция $S' = \text{sgn}(\hat{\lambda}) {}_{-1/2}S_{jm}$. Собственные значения можно связать с полным моментом j частицы спина $1/2$: $\hat{\lambda} = \pm(j+1/2)$, причем положительные $\hat{\lambda}$ отвечают сложению орбитального и спинного моментов $j=l+1/2$, $l=0, 1, 2, \dots$, а отрицательные — вычитанию $j=l-1/2$, $l=1, 2, \dots$, так что суммирование по всем $\hat{\lambda}$ включает как суммирование по значениям орбитального момента, так и по спиновым состояниям

$$\sum_{\hat{\lambda}} = \sum_{l=0, j=l+1/2}^{\infty} + \sum_{l=1, j=l-1/2} . \quad (\text{Д.34})$$

Аналогичную классификацию состояний частицы со спином $1/2$ можно сохранить и при $a \neq 0$, собственные значения и собственные функции при этом можно построить в виде рядов по степеням a [301]. Результаты численного интегрирования уравнения (Д.33) приведены в [241, 2].

В случае метрики Керра—Ньюмена—де Ситтера угловые функции уже не сводятся (за исключением случая $a=0$) к рассмотренным типам, их свойства пока изучены недостаточно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. — М.: Наука, 1971.
2. Chandrasekhar S. The mathematical theory of black holes. Clarendon Press, 1983.
3. Teukolsky S. A., Shapiro S. L. Black holes, white dwarfs and neutron stars. — N. Y.: Wiley, 1983.
4. Блэнфорд Р. Д., Торн К. С. Астрофизика черных дыр. — В кн.: Общая теория относительности/Пер. с англ. — М.: Мир, 1983, с. 163—216.
5. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977, с. 406.
6. Michell J. On the Means of Discovering the Distance, Magnitude of the Fixed Stars. — Phil. Trans. of the Royal Soc. of Lond., 1784, v. LXXIV, part I, p. 35—57 (см. также в кн.: Black Holes: Selected Reprints, ed. by S. Detweiler, Yale Univ., 1982, p. 8—19).
7. Шварцшильд К. О гравитационном поле точечной массы в эйнштейновской теории. Sitzungsber. d. Ber. Akad., 1916, s. 189 (имеется пер. в кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. — М.: Мир, 1974, с. 199—207).
8. Kerr P. — Phys. Rev. Lett., 1963, v. 11, p. 237—238 (имеется перевод в том же сб. с. 208—211).
9. Teukolsky S. — Astroph. Journ., 1973, v. 185, p. 635—647.
10. Зельдович Я. Б. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 14, с. 270—272; — ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 2076—2081.
11. Misner C. W. Stability of Kerr black holes against scalar perturbations. — Bull. Amer. Phys. Soc., 1972, v. 17, p. 472.
12. Старобинский А. А. — ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 48—57.
13. Хокинг С. — Comm. Math. Phys., 1975, v. 43, p. 199—220 (имеется пер., см. [7], с. 479—509).
14. Черные дыры, сб. статей под ред. В. П. Фролова. — НФФ, вып. 9. — М.: Мир, 1978, 321 с.
15. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. — М.: Атомиздат, 1980, 296 с.
16. Биррел Н., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. — М.: Мир, 1983, с. 356.
17. Gibbons G. W., Hawking S. W. — Comm. Math. Phys., 1979, v. 66, p. 291—310.
18. Hawking S. W., Page D. N., Pope C. N. — Nuclear Phys. B, 1980, v. 170, p. 283—306.
19. Guven R. — Phys. Rev. D, 1982, v. 25, p. 3117—3125.
20. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. — М.: Наука, 1980.
21. Black Holes. Eds. De Witt B. S. De Witt C., N. Y., 1973.
22. General Relativity, An Einstein centenary survey ed. by Hawking S. W. and Israel W. Cambridge, 1979, 919 p. (имеется пер. части статей в кн.: Общая теория относительности. — М.: Мир, 1983, 455 с.).
23. Фролов В. П. — УФН, 1976, т. 118, с. 473—503. Введение в физику черных дыр. — М.: Знание, 1983, 62 с.
24. Carter B. — Phys. Rev., 1968, v. 174, p. 1554—1571.
25. Hawking S. W. — Comm. Math. Phys., 1972, v. 25, p. 152—166.
26. Bardeen J. M., Carter B., Hawking S. W. — Comm. Math. Phys., 1973, v. 31, p. 161—170.
27. Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. — ЖЭТФ, 1965, т. 49, с. 170—181.
28. Israel W. — Phys. Rev., 1967, v. 164, p. 1776—1779.
29. Carter B. — Phys. Rev. Lett., 1971, v. 26, p. 331—333.
30. Robinson D. C. — Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 458—460.
31. Newman E. T., Couch E., Chinnapared K. et al. — Journ. of Math. Phys., 1965, v. 6, p. 918—919.

32. Mazur P. O. — Journ. of Phys. A, 1982, v. 15, p. 3173—3180.
33. Perry M. J. — Phys. Lett. B, 1977, v. 71, p. 234—236.
34. Bekenstein J. D. — Phys. Rev., 1972, v. 5D, p. 2403—2412.
35. Boyer R. H., Lindquist R. W. — Journ. of Math. Phys., 1967, v. 8, p. 265—281.
36. Мизнер Ч., Торн К. С., Уилер Дж. Гравитация. — М.: Мир, 1977, т. 3, с. 67.
37. Christodoulou D. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 1596—1597.
38. Smarr L. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 71—73.
39. Beckenstein J. D. — Phys. Rev., 1974, v. 9D, p. 3292—3300.
40. Carter B. The general theory of the mechanical, electromagnetic and thermodynamic properties of black holes. — В кн.: General Relativity. An Einstein Centenary Survey. Eds. Hawking S. W., Israel W., Cambridge, 1979, p. 294—369.
41. Walker M., Penrose R. — Comm. Math. Phys., 1970, v. 18, p. 265—274.
42. Hughston L. P., Penrose R., Sommers P., Walker M. — Comm. Math. Phys., 1972, v. 27, p. 303—308.
43. Hughston L. P., Sommers P. — Comm. Math. Phys., 1973, v. 32, p. 147—152.
44. Woodhouse N. M. J. — Comm. Math. Phys., 1975, v. 44, p. 9—38.
45. Carter B. — Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 3395—3414.
46. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. — М.: ИЛ, 1957.
47. Penrose R. — Ann. N. Y. Acad. Sci., 1973, v. 224, p. 125.
48. Newman E. T., Penrose R. — Journ. of Math. Phys., 1962, v. 3, p. 566—579.
49. Geroch R., Held A., Penrose R. — Journ. of Math. Phys., 1973, v. 14, p. 874—881.
50. Фролов В. П. — Труды ФИАН, 1977, т. 96, с. 72—180.
51. Алексеев Г. А., Хлебников В. И. — ЭЧАЯ, 1978, т. 9, № 5, с. 1070—1150.
52. Kinnersley W. — Journ. of Math. Phys., 1969, v. 10, p. 1195—1203.
53. Bose S. K. — Journ. of Math. Phys., 1975, v. 16, p. 772—775.
54. Goldberg J. N., Sachs R. K. — Acta Phys. Polon., 1962, Suppl., v. 22, p. 13—23.
55. Hawking S. W., Hartle J. B. — Comm. Math. Phys., 1972, v. 27, p. 283—290.
56. Melwin M. A. — Phys. Rev., 1965, v. 139 B, p. 225—243.
57. Ehlers J. Transformations of static exterior solution of Einstein's gravitational field equations into different solutions by means of conformal mappings. — В кн.: Les theories relativistes de la gravitation. Paris, 1959, p. 275.
58. Harrison B. K. — Journ. of Math. Phys., 1968, v. 9, p. 1744—1752.
59. Ernst F. J. — Phys. Rev., 1968, v. 167, p. 1175—1179; v. 168, p. 1415—1417.
60. Matzner R., Misner C. W. — Phys. Rev., 1967, v. 154, p. 1229—1232.
61. Israel W., Wilson G. A. — Journ. of Math. Phys., 1972, v. 13, p. 865—867.
62. Kinnersley W. — Journ. of Math. Phys., 1972, v. 14, p. 651—653.
63. Ernst F. J. — Journ. of Math. Phys., 1976, v. 17, p. 54—56.
64. Гальцов Д. В., Петухов В. И. — ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 801—819.
65. Ernst F. J., Wild W. J. — Journ. of Math. Phys., 1976, v. 17, p. 182—184.
66. Алиев А. Н., Гальцов Д. В., Соколов А. А. — Изв. высш. уч. зав., сер. физика, 1980, т. 23, с. 7—12.
67. Wild W. J., Kerns R. M., Drish W. F. — Phys. Rev., 1981, v. 23 D, p. 829—831.
68. Hanni R. S., Ruffini R. — Lett. Nuovo Cim., 1976, v. 15, p. 189—194.
69. Bose S. K., Esteban E. — Journ. of Math. Phys., 1981, v. 22, p. 3006—3009.
70. Hiscock W. A. — Journ. of Math. Phys., 1981, v. 22, p. 1828—1833.
71. Sharp N. A. — Gen. Rel. and Grav., 1979, v. 10, p. 659—670.
72. Prasanna A. R. — Riv. del Nuovo Cim., 1980, v. 3, p. 1—52.

73. Bardeen J. M., Press W. H., Teukolsky S. A. — *Astroph. Journ.*, 1972, v. 178, p. 347—369.
74. Bose S. K., Wang M. J. — *Journ. of Math. Phys.*, 1974, v. 15, p. 957—962.
75. King A. R., Lasota J. P., Kundt W. — *Phys. Rev., D*, 1975, v. 12, p. 3037—3042.
76. Aliev A. N., Gal'tsov D. V. — *Gen. Rel. and Grav.*, 1981, v. 13, p. 889—911.
77. Иванецкая О. С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории тяготения. — Минск: Наука и техника, 1979, 395 с.
78. Кривенко О. П., Пирагас К. А. О вторых интегралах геодезических линий в поле Керра. — Препринт ИТФ—73—38 Р, Киев, 1973.
79. Рябушко А. П. Движение тел в общей теории относительности. — Минск, 1979, 237 с.
80. Armenti A. — *Nuovo Cim.*, 1975, v. 25 B, p. 442—448.
81. Алиев А. И., Гальцов Д. В., Соколов А. А. — *Вестн. МГУ, сер. физ., астр.*, 1980, т. 21, № 4, с. 10—16.
82. Wilkins D. C. — *Phys. Rev. D*, 1972, v. 5, p. 814—822.
83. Buchdahl H. A. — *Nuovo Cim.*, 1962, v. 25, p. 486—496.
84. Gibbons G. W. — *Journ. of Phys. A: Math., Gen.*, 1976, v. 9, p. 145—148.
85. Пенроуз Р. Конформная трактовка бесконечности. — В кн.: «Relativity, groups and topology» eds De Witt B., De Witt C., Lond., 1964, p. 565 (имеется перевод в кн.: Гравитация и топология. — М.: Мир, 1966, с. 152—181).
86. Chernikov N. A., Tagirov E. A. — *Ann. Inst. H. Poincare*, 1968, v. 9, p. 109—141.
87. Nelson B. L., Panangaden P. — *Phys. Rev. D*, 1982, v. 25, p. 1019—1027.
88. Gibbons S. W., Hawking S. W. — *Phys. Rev. D*, 1977, v. 15, p. 2752—2756.
89. Teukolsky S. A., Press W. H. — *Astroph. Journ.*, 1974, v. 194, p. 443—461.
90. Brill D. R., Chrzanowski P. L., Pereira C. M. et al. — *Phys. Rev. D*, 1972, v. 5, p. 1913—1915.
91. Breuer R. A. — *Lecture Notes in Physics*, 1975, v. 44, 196 p.
92. Chandrasekhar S. — *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1978, v. 358, p. 421—439, p. 441—465.
93. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979, с. 501.
94. Chrzanowski P. L., Misner C. W. — *Phys. Rev. D*, 1974, v. 10, p. 1701—1721.
95. Старобинский А. А., Чурилов С. М. — *ЖЭТФ*, 1973, т. 65, с. 3—11.
96. Page D. N. — *Phys. Rev. D*, 1976, v. 13, p. 198—206.
97. Press W. M., Teukolsky S. A. — *Astroph. Journ.*, 1973, v. 185, p. 649—673.
98. Chrzanowski P. L. — *Phys. Rev. D*, 1975, v. 11, p. 2042—2061.
99. Chrzanowski P. L. — *Phys. Rev. D*, 1976, v. 13, p. 806—818.
100. Bičak J., Dvořák L. — *Gen. Rel. and Grav.*, 1976, v. 7, p. 959—983.
101. Price R. H. — *Phys. Rev. D*, 1972, v. 5, p. 2419—2438; p. 2439—2454.
102. Паташинский А. З., Пинус В. К., Харьков А. А. — *ЖЭТФ*, 1974, т. 66, с. 393—405.
103. Сигбатуллин Н. Р., Алексеев Ю. А. — *ЖЭТФ*, 1966, т. 74, с. 1187.
104. Kofman L. A. — *Phys. Lett.*, 1981, v. 84 A, p. 232—234.
105. Cohen J. M., Kegeles L. S. — *Phys. Rev. D*, 1974, v. 10, p. 1070—1084.
106. Kegeles L. S., Cohen J. M. — *Phys. Rev. D*, 1979, v. 19, p. 1641—1664.
107. Pechenick K. R., Kearney M. W., Cohen J. M. — *Nuovo Cim.*, 1981, v. B64, No. 2, p. 453—470.
108. Chandrasekhar S. — *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 1976, v. 348 A, p. 39—55.
109. Chandrasekhar S. — *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 1976, v. 349A, p. 1—8.
110. Wald R. M. — *Journ. of Math. Phys.*, 1973, v. 14, p. 1453—1461.
111. Fackerell E. D., Ipser J. R. — *Phys. Rev. D*, 1972, v. 5, p. 2455—2458.
112. Wald R. M. — *Phys. Rev. Lett.*, 1978, v. 41, p. 203—206.
113. Gal'tsov D. V. — *Journ. of Phys. A: Math., Gen.*, 1982, v. 15, p. 3737—3749.

114. *Сибгатуллин Н. Р., Алексеев Г. А.* — ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1233—1249.
115. *Bičák J.* — Czech. J. Phys., 1979, v. B 29, p. 945—980.
116. *Chandrasekhar S., Xantopoulos B. C.* — Proc. Roy. Soc. Lond., 1979, v. A 367, p. 1—14.
117. *Detweiler S.* — Proc. Roy. Soc. Lond., 1976, v. A 349, p. 217—230.
118. *Chandrasekhar S., Detweiler S. L.* — Proc. Roy. Soc. Lond., 1976, v. A 350, p. 165—174.
119. *Detweiler S. L.* — Proc. Roy. Soc. Lond., 1977, v. A 352, p. 381—395.
120. *Sasaki M., Nakamura T.* — Phys. Lett., 1982, v. 89 A, p. 68—70.
121. *Isaakson R. A.* — Phys. Rev., 1968, v. 166, p. 1263—1271.
122. *Linet B.* — Phys. Lett., 1977, v. 60A, p. 395—396.
123. *Linet B.* — Journ. of Phys. A: Math., Gen., 1979, v. 12, p. 839—846.
124. *Weinstein A.* — Trans. of Amer. Math. Soc., 1948, v. 63, p. 342—354.
125. *Weinstein A.* — Bull. Amer. Math. Soc., 1953, v. 59, p. 20—37.
126. *Diaz J. B., Weinstein A.* On the fundamental solutions of a singular Beltrami operator. Studies in Mathematics and Mechanics presented to R. v. Mises. — N. Y., 1954, p. 98—102.
127. *Copson E. T.* — Proc. Roy. Soc. Lond., 1928, v. A118, p. 184—194.
128. *Linet B.* — J. Phys., 1976, v. A9, p. 1081—1087.
129. *Leaute B.* — Ann. Inst. U. Poincare, 1977, v. 27, p. 167—173.
130. *Misra R. M.* — Prog. Theor. Phys., 1977, v. 57, p. 694—696.
131. *Misra R. M.* — Prog. Theor. Phys., 1977, v. 58, p. 1205—1217.
132. *Linet B.* — C. R. Acad. Sc. Paris, 1977, t. 284A, p. 215—217.
133. *Unruh W. G.* — Proc. Roy. Soc. Lond., 1976, v. A348, p. 447—465.
134. *Vilenkin A.* — Phys. Rev., 1979, v. 20D, p. 373—376.
135. *Smith A. G., Will C. M.* — Phys. Rev., 1980, v. D22, p. 1276—1284.
136. *Leaute B., Linet B.* — Journ. of Phys., 1982, v. 15A, p. 1821—1825.
137. *Bicak J.* — Proc. Roy. Soc. Lond., 1980, v. 371A, p. 420—438.
138. *Зельников А. И., Фролов В. П.* — ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 321—335.
139. *Зельников А. И.* Эффекты поляризации вакуума и сдвига собственной энергии частиц в сильных гравитационных полях. Канд. дис. — М., 1983, с. 73.
140. *Demiansky M.* — Gen. Rel. and Grav., 1976, v. 7, p. 551—567.
141. *Gal'tsov D. V., Petukhov V. I., Aliev A. N.* — Phys. Lett., 1984, v. 105A, No 7, p. 346—350.
142. *Wald R. M.* — Phys. Rev., 1974, v. 10 D, p. 1680—1685.
143. *Papapetrou A.* — Ann. Inst. H. Poincare, 1966, v. 4, p. 83—105.
144. *Gibbons G. W.* — Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1976, v. 177, p. 37P—41P.
145. *Lovelace R. V. E.* — Nature, 1976, v. 262, p. 649—652.
146. *Takahara F.* — Progr. of Theor. Phys., 1978, v. 66, p. 1606—1608.
147. *Blanford R. D., Znajek R. L.* — Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1977, v. 179, p. 433—456.
148. *Znajek R. L.* — Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1978, v. 185, p. 833—842.
149. *Damour Th., Hanni R. S., Ruffini R., Wilson J. R.* — Phys. Rev., 1978, v. 17D, p. 1518—1523.
150. *Macdonald D., Thorne K. S.* — Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1982, v. 198, p. 345—382.
151. *Thorne K. S., Macdonald D.* — Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1982, v. 198, p. 339—343.
152. *Press W. H.* — Astroph. Journ., 1972, v. 175, p. 243—252.
153. *Pollock M. D.* — Proc. Roy. Soc. Lond., 1976, v. A350, p. 239—252.
154. *Pollock M. D., Brinkman W. P.* — Proc. Roy. Soc. Lond., 1977, v. A356, p. 351—362.
155. *King A. R., Lasota J. P.* — Astroph. Journ., 1977, v. 58, p. 175.
156. *Damour Th.* — Phys. Rev., 1978, v. 18D, p. 3598.
157. *Damour Th.* Surface effects in black hole physics. — Proc. of the II Marcel Grossman Meet. (Trieste, 1979) ed. R. Ruffini, Amst., 1982.
158. *Ruffini R., Treves A.* — Astrophys. J. Lett., 1973, v. 13, p. 109—112.
159. *Taylor J. H., Fowler L. A., McCulloch P. M.* — Nature, 1979, v. 227, p. 437.
160. *Peters P. C., Matthews J.* — Phys. Rev., 1963, v. 131, p. 435—440.
161. *Wagoner R. V.* — Astrophys. Journ., 1975, v. 196, p. 63—65.

162. Wagoner R. V., Will C. M. — *Astroph. Journ.*, 1976, v. 210, p. 764.
163. Will C. M. Theory and experiment in gravitational physics. — Cambridge, 1981, 342 p.
164. Gal'tsov D. V., Matiukhin A. A., Petukhov V. I. — *Phys. Lett.*, 1978, v. 77A, p. 387—390.
165. Misner C. W. — *Phys. Rev. Lett.*, 1972, v. 28, p. 994—997.
166. Weber J. — *Phys. Rev. Lett.*, 1969, v. 22, p. 1320—1324.
167. Sciama D. W., Field G. F., Rees M. J. — *Phys. Rev. Lett.*, 1969, v. 23, p. 1514—1519.
168. Lynden-Bell D. — *Nature*, 1969, v. 223, p. 690—694.
169. Breuer R. A., Chrzanowski P. L., Hughes III H. G., Misner C. W. — *Phys. Rev. D*, 1973, v. 8, p. 4309.
170. Тернов И. М., Халилов В. Р., Чижов Г. А., Маглеванный И. И. — *Письма в ЖЭТФ*, 1974, т. 19, с. 503—507.
171. Тернов И. М., Халилов В. Р., Чижов Г. А., Маглеванный И. И. — *ЖЭТФ*, 1975, т. 68, с. 377—386.
172. Тернов И. М., Халилов В. Р., Чижов Г. А. — *Изв. высш. уч. зав., сер. физика*, 1974, № 12, с. 42—51.
173. Хриплович И. Б., Шуряк Э. В. — *ЖЭТФ*, 1973, т. 65, с. 2137—2140.
174. Алексеев Г. А. Излучение и распространение волн в сильных полях тяготения. — Канд. дис. М., 1975.
175. Алексеев Г. А. — *ДАН СССР*, 1975, т. 222, с. 312.
176. Матюхин А. А. Релятивистские эффекты в электромагнитном и гравитационном излучении гравитирующих тел. — Канд. дис. М., 1980.
177. Гальцов Д. В., Грац Ю. В. Гравитационное излучение при столкновениях тел, движущихся с релятивистской скоростью. — В кн.: *Актуальные проблемы теоретической физики*. М.: МГУ, 1976, с. 258—273.
178. Гальцов Д. В., Грац Ю. В., Матюхин А. А. Лоренц-ковариантный подход к описанию радиационных процессов в ОТО. — В кн.: *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц*. М.: Энергоиздат, 1984.
179. Яковлев Д. Г. — *ЖЭТФ*, 1975, т. 68, с. 369.
180. Dumnikova I. G. — *Astrophys. and Sp. Sci.*, 1977, v. 51, p. 229—234.
181. Гальцов Д. В., Матюхин А. А. — *Ядерная физика*, 1986.
182. Detweiler S. L., Szedenits E. Jr. — *Astroph. J.*, 1979, v. 231, p. 211—218.
183. Kojima Y., Nakamura T. — *Phys. Lett. A*, 1983, v. 96, p. 335—338.
184. Nakamura T., Haugan M. P. — *Astroph. Journ.*, 1983, v. 269, p. 292—296.
185. Sasaki M., Nakamura T. — *Prog. Ther. Phys.*, 1982, v. 67, p. 1788—1808.
186. Orchard K., Nakamura T. — *Phys. Lett. A*, 1983, v. 94, p. 349—352.
187. Tyson J. A., Douglass D. H. — *Phys. Rev. Lett.*, 1972, v. 28, p. 991—994.
188. Stewart J. M., Walker M. — *Comm. Math. Phys.*, 1973, v. 29, p. 43—47.
189. Штирбу А. Е. Функции Грина и радиационное трение в поле Керра. Дипломная работа. — М.: МГУ, 1979.
190. Kalman G. — *Phys. Rev.*, 1961, v. 123, p. 384.
191. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. — *ДАН СССР*, 1948, т. 59, с. 1551—1554.
192. Соколов А. А. — *ДАН СССР*, 1949, т. 67, с. 1013—1016.
193. Schwinger J. — *Phys. Rev.*, 1949, v. 75, p. 1912—1925.
194. Соколов А. А., Клепиков Н. П., Тернов И. М. — *ЖЭТФ*, 1952, т. 23, с. 632—640.
195. Соколов А. А., Тернов И. М. — *ЖЭТФ*, 1956, т. 31, с. 473—478.
196. Соколов А. А., Тернов И. М. — *ДАН СССР*, 1953, т. 92, с. 537—540.
197. Синхротронное излучение. Сб. статей под ред. Соколова А. А. и Тернова И. М. — М.: Наука, 1966, с. 202.
198. Тернов И. М., Михайлин В. В., Халилов В. Р. Синхротронное излучение и его применения. — М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 275.
199. Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В. Квантовая электродинамика. — М.: Изд-во МГУ, 1983, 311 с.
200. Соколов А. А., Тернов И. М. — *ДАН СССР*, 1963, т. 153, с. 1052—1057.
201. Sokolov A. A., Ternov I. M., Bagrow W. G., Gal'tsov D. W., Zhukovsky W. T. — *Zeit. fur Physik*, 1968, v. 210, p. 1—8.
202. Гальцов Д. В., Никитина Н. С. — *Вестн. Моск. ун-та. Сер. физика, астрономия*, 1970, № 3, с. 329—335.

203. Соколов А. А., Тернов И. М. — ДАН СССР, 1966, с. 1332—1334.
204. Гальцов Д. В., Жуковский В. Ч. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. физика, астрономия, 1968, № 4, с. 11—19.
205. Гальцов Д. В., Жуковский В. Ч. — Изв. высш. уч. зав. Сер. радиофизика, 1968, т. 11, с. 941—942.
206. Гальцов Д. В., Павленко Ю. Г. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. физика, астрономия, 1968, т. 2, с. 101—109.
207. Гальцов Д. В., Лосев В. А. — Ядерная физика, 1973, т. 17, с. 109—111.
208. Гальцов Д. В., Лосев В. А. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. физика, астрономия, 1975, № 1, с. 37—45.
209. Соколов А. А., Гальцов Д. В., Жуковский В. Ч. — ЖТФ, 1973, т. 43, с. 682—685.
210. Гапонов А. В., Петелин М. В., Юлпатов В. К. — Изв. высш. уч. зав., сер. радиофизика, 1967, т. 10, с. 1414—1453.
211. Galt'sov D. V. — Annals of Inst. H. Poincaré, 1968, v. 9, p. 35—43.
212. Гальцов Д. В. Об усилении электромагнитных волн квазиклассическими системами. — Канд. дис. М., 1968.
213. Тернов И. М., Халилов В. Р., Родионов В. Н. Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. — М.: Изд-во МГУ, 1982, с. 304.
214. Соколов А. А., Гальцов Д. В., Петухов В. И. — Изв. высш. уч. зав. Сер. физика, 1978, № 12, с. 102—105. Sokolov A. A., Galt'sov D. V., Petukhov V. I. — Phys. Lett., 1978, v. 68 A, p. 1—2.
215. Соколов А. А., Алиев А. Н., Гальцов Д. В. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. физика, астрономия, 1982, т. 23, № 5, с. 88—91.
216. Соколов А. А., Тернов И. М., Алиев А. Н., Гальцов Д. В. — Изв. высш. уч. зав. Сер. физика, 1983, т. 26, № 1, с. 37—42.
217. Sokolov A. A., Aliev A. N., Galt'sov D. V. — In Abstracts of Contributed Papers of 10—th International Conference on General Relativity and Gravitation (Italy, Padova, 1983, v. 2, p. 725—727).
218. Соколов А. А., Гальцов Д. В., Петухов В. И. — Оптика и спектроскопия, 1978, т. 45, с. 3—12.
219. Соколов А. А., Гальцов Д. В., Колесникова М. М. — Изв. высш. уч. зав. Сер. физика, 1971, № 4, с. 14—23.
220. Тернов И. М., Багров В. Г., Дорофеев О. Ф. — Изв. высш. уч. зав. Сер. физика, 1968, № 10, с. 63—69.
221. Гальцов Д. В. Радиационные процессы в сильных электромагнитных и гравитационных полях. — Докт. дис. М., 1980, с. 74.
222. Пустовойт В. И., Герценштейн М. Е. — ЖЭТФ, 1961, т. 42, № 1, с. 163—170.
223. Гальцов Д. В., Грац Ю. В., Петухов В. И. Излучение гравитационных волн электродинамическими системами. — М.: Изд-во МГУ, 1984, 128 с.
224. Сибгатуллин Н. Р. Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. — М.: Наука, 1984, 352 с.
225. Петухов В. И. Черная дыра во внешнем магнитном поле. — Канд. дис. М.: МГУ, 1979.
226. Гальцов Д. В., Лоскутов Ю. М., Соколов А. А., Тернов И. М., Халилов В. Р. Гравитационное излучение заряда в магнитном поле. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. — М.: Атомиздат, 1975, вып. 6, с. 108—121.
227. Алексеев Г. А. Синхротронное излучение ультрарелятивистских заряженных частиц на круговых орбитах в поле заряженной вращающейся черной дыры. — В кн.: Классическая и квантовая теория гравитации. — Минск: ИФАН БССР, 1976, с. 144—145.
228. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1975.
229. Гапонов А. В. — Изв. высш. уч. зав. Сер. радиофизика, 1959, т. 2, с. 450—462, 836—837.
230. Schneider J. — Phys. Rev. Lett., 1959, v. 2, p. 504.
231. Гальцов Д. В., Павленко Ю. Г. — Изв. высш. уч. зав. Сер. радиофизика, 1966, т. 9, с. 1232—1233.

232. Гальцов Д. В., Жуковский В. Ч., Коровин Ю. А., Любимов В. Н., Павленко Ю. Г. — Изв. высш. уч. зав. Сер. радиофизика, 1967, т. 10, с. 734—737.
233. Гальцов Д. В. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. физика, астрономия, 1969, № 6, с. 27—34.
234. Galtsov D. V., Petukhov V. I. — Phys. Lett., 1978, v. 66A, p. 346—348.
235. Павленко Ю. Г. — ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 1285—1290.
236. Galtsov D. V., Petukhov V. I. — Phys. Lett., 1982, v. 90A, p. 351—354.
237. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. — Астрон. журн., 1966, т. 43, № 4, с. 758—760.
238. Hawking S. W. — Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1971, v. 152, p. 75—78.
239. Hawking S. W. — Nature, 1974, v. 248, p. 30—31.
240. Page D. N. — Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 3260.
241. Page D. N. — Phys. Rev. D, 1977, v. 16, No 6, p. 2402—2411.
242. Gibbons G. W. — Phys. Rev. D, 1977, v. 15, No 12, p. 3530—3535.
243. Lohiya D. — Ann. of Phys. (NY), 1983, v. 145, p. 116—130.
244. Jackiw R., Rebbi C. — Phys. Rev. D, 1976, v. 13, No 12, p. 3398—3409.
245. Lohiya D. — Phys. Lett., 1983, v. 130 B, No 3—4, p. 179—182.
246. Lohiya D. — Phys. Rev. D, 1984, v. 30, No 6, p. 1194—1197.
247. Dirac P. A. M. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1931, v. 133 A, p. 60—71; Phys. Rev., 1948, v. 74, p. 817; Int. J. of Theor. Phys., 1978, v. 17, p. 235.
248. Thomson J. J. Elements of the Mathematical Theory of Electricity and magnetism. — 1900.
249. Wilson H. A. — Phys. Rev., 1949, v. 75, No 2, p. 300.
250. Wu T. T., Yang C. N. — Phys. Rev. D, 1976, v. 14, No 2, p. 437—445.
251. Коульмен С. — УФН, 1984, т. 144, № 2, с. 277—340.
252. Yasskin P. B. — Phys. Rev. D, 1975, v. 12, No 8, p. 2212—2217.
253. Aragone C., Colagiacomo G. — Phys. Lett., 1978, v. 79B, No 3, p. 340—342.
254. Wu T. T., Yang C. N. — В кн.: Properties of Matter under unusual conditions eds. Mark H., Fernbach S., N. Y., 1969, p. 349.
255. Bais F. A., Ruseel R. J. — Phys. Rev. D, 1975, v. 11, p. 2692—2695.
256. Cho Y. M., Freund P. G. O. — Phys. Rev. D, 1975, v. 12, No 6, p. 1588—1589.
257. Wang M. J. — Phys. Rev. D, 1975, v. 12, No 610, p. 3069—3071.
258. Kasuya M. — Progr. of Theor. Phys., 1982, v. 67, No 2, p. 499—507.
259. Kamata M. — Progr. of Theor. Phys., 1982, v. 68, No 3, p. 960—974.
260. Kamata M., Kasuya M. — Phys. Rev. D, 1982, v. 25, No 4, p. 995—1001.
261. Поляков А. М. — Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 430.
262. 'tHooft G. — Nucl. Phys., 1974, v. B79, p. 276.
263. Julia B., Zee A. — Phys. Rev. D, 1975, v. 11, p. 2227—2232.
264. Van Nieuwenhuizen P., Wilkinson D., Perry M. J. — Phys. Rev., 1976, v. D13, p. 778—784.
265. Comtet A. — Ann. of Inst. H. Poincare, 1980, v. 32, No 3, p. 283—294.
266. Melnikov V. N., Shigolev V. K. — 10 Int. conf. on Gen. Rel. a Grav., Padova, 1983, v. 1, p. 307—309.
267. Arafune J., Freund P. G. O., Goebel C. J. — Journ. of Math. Phys., 1975, v. 16, p. 433.
268. Фролов В. П. — Теоретич. и математич. физика, 1974, т. 21, № 2, с. 213—223.
269. Gibbons G. W., Hawking S. W. — Phys. Rev. D, 1977, v. 15, No 10, p. 2738—2751.
270. Stuchlik Z. — Bull. Astron. Inst. Czechosl., 1983, v. 34, p. 129—149.
271. Khanal U., Panchapakesan N. — Phys. Rev. D, 1981, v. 24, No 4, p. 835—838; Phys. Rev. D, 1981, v. 24, No 4, p. 829—834.
272. Khanal U. — Phys. Rev. D, 1983, v. 28, No 6, p. 1291—1297.
273. Unruh W. G. — Phys. Rev. D, 1976, v. 14, No 4, p. 870—892.
274. Fulling S. A. — Journ. of Phys. A, 1977, v. 10, No 6, p. 917—951.
275. Iyer B. R., Kumar A. — Prāmana J., 1979, v. 12, No 2, p. 103—120.
276. Cohen J. M., Powers R. T. — Comm. of Math. Phys., 1982, v. 86, p. 69—86.
277. Zouros T. J. M., Eardley D. M. — Ann. of Phys., 1979, v. 188, p. 139—155.

278. Аронов М. И. Массивное скалярное поле вблизи вращающейся черной дыры. Дипломная работа. — МГУ, 1982.
279. Тернов И. М., Халилов В. Р., Чижов Г. А., Гаина А. Б. — Изв. высш. уч. зав. Сер. физика, 1978, № 9, с. 109—114.
280. Гаина А. Б. Квантовые частицы в полях Керра—Ньюмена. — Канд. дис. М.: МГУ, 1982.
281. Detweiler S. L. — Phys. Rev. D, 1980, v. 22, p. 2323—2326.
282. Kofman L. A. — Phys. Lett., 1982, v. 87, No 6, p. 281—284.
283. Гальцов Д. В., Померанцева Г. В., Чижов Г. А. — Изв. высш. уч. зав. Сер. физика, 1983, № 8, с. 75—77.
284. Соколов А. А., Тернов И. М., Гальцов Д. В., Алиев А. Н. — В сб. тезисов докладов Всес. конф. «Совр. теор. и эксп. проблемы теории относительности и гравитации». М., 1984, с. 105—106.
285. Fock V., Ivanenko D. — Zeit. Phys., 1929, v. 54, p. 798—802.
286. Brill D. R., Wheeler J. A. — Rev. Mod. Phys., 1957, v. 29, No 3, p. 465—479.
287. Unruh W. G. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, No 20, p. 1265—1267.
288. Unruh W. G. — Phys. Rev. D, 1974, v. 10, No 10, p. 3194—3205.
289. Chandrasekhar S. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1976, v. 349 A, p. 571—575.
290. Lee C. H. — Phys. Lett., 1977, v. 68 B, No 6, p. 152—156.
291. Güven R. — Phys. Rev. D, 1977, v. 16, No 6, p. 1706—1711.
292. Güven R. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1977, v. 356A, p. 465—470.
293. Adler S. L. — Phys. Rev., 1969, v. 177, No 5, p. 2426—2438.
294. Bell J., Jackiw R. — Nuovo Cim., 1969, v. 60A, No 1, p. 47—61.
295. Гальцов Д. В., Никитина Н. С. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. физика, астрономия, 1973, № 1, с. 119—122.
296. Delbourgo R., Salam A. — Phys. Lett., 1972, v. 40B, No 3, p. 381—382.
297. Eguchi T., Freund P. G. O. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, No 19, p. 1251—1254.
298. Carter B., McLenaghan R. G. — Phys. Rev. D, 1979, v. 19, No 4, p. 1093—1097.
299. McLenaghan R. G., Spindel Ph. — Phys. Rev. D, 1979, v. 20, No 2, p. 409—413.
300. Kamran N., McLenaghan R. G. — Journ. of Math. Phys., 1984, v. 25, No 4, p. 1019—1027.
301. Suffern K. G., Fackerell E. D., Cosgrove C. M. — Journ. of Math. Phys., 1983, v. 24, No 5, p. 1350—1358.
302. Chakrabarti S. K. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1984, v. 391A, p. 27—38.
303. Beckenstein J. D. — Phys. Rev. D, 1973, v. 7, No 4, p. 949—953.
304. Maeda K. — Progr. of Theor. Phys., 1976, v. 55, No 5, p. 1677—1678.
305. Leahy D. A., Unruh W. G. — Phys. Rev. D, 1979, v. 19, No 12, p. 3509—3515.
306. Iyer B. K., Kumar A. — Prāmana J., 1978, v. 11, No 2, p. 171—185.
307. Blaer A. S., Christ N. H., Tang J. F. — Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, No 19, p. 1364—1366; Phys. Rev. D, 1982, v. 25, p. 2128.
308. Тернов И. М., Гаина А. Б., Чижов Г. А. — Изв. высш. уч. зав., сер. физика, 1980, № 8, с. 56—62.
309. Гальцов Д. В., Померанцева Г. В., Чижов Г. А. — Изв. высш. уч. зав., сер. физика, 1984, № 8, с. 81—85.
310. Goldberg J. N., Macfarlane A. J., Newman E. T. et al. — Journ. of Math. Phys., 1967, v. 8, p. 2155—2161.
311. Fackerell E. D., Crossman R. G. — Journ. of Math. Phys., 1977, v. 18, p. 1849—1854.
312. Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. — М.: Наука, 1976.
313. Белинский В. А., Захаров В. Е. — ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 1953; 1979, т. 77, с. 3.
314. Алексеев Г. А. — ДАН СССР, 1985, т. 283, с. 577.
315. Aliiev A. N., Gal'tsov D. V., Petukhov V. I. — Ap. and Sp. Sci., 1986, v. 124, p. 137—157.
316. Рубаков В. П. — Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 33, с. 658.
317. Тамм И. Е. — ДАН СССР, 1940, т. 29, с. 551—558.

ной

сш.

цис.

ав.

те-

но-

5—

5.

ро·

882.

19,

3—

2,

о 4,

ys.,

3.

3.

9—

47,

фи-

ав.,

ath.

18,

и

979,

124,

Д.В. Павлов

80